II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola

Pataki Gábor

STATISZTIKA I.

Jegyzet

2013

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola bár alapvetőleg pedagógia intézmény, de tudjuk, hogy a XXI. században, nem állhatunk meg, s a kor kihívásainak megfelelően lépést kell tartanunk olyan gyakorlati tudományokban is, amely nem csak a kultúrát, a nyelvet, az oktatást tartja fenn, hanem megpróbál gazdasági alapot is biztosítani, hogy az ember, a kultúra, a társadalom egy élhető és fenntartható közegben életteret, kibontakozási lehetőséget kapjon.

Az oktatási intézményünk ezért már több, mint egy évtizede együttműködve a Nyíregyházi Főiskolával gazdálkodási képzést szervez, ill. nappalis és levelező tagozaton könyvvitel és auditálás szakot indított. Ezek a gazdasági képzések még a mai kárpátaljai munkaerőpiacon releváns és életképes diplomának, tudásnak számít. Ezért mind a piac oldaláról, mint a hallgatói jelentkezések irányából igény van az ilyen irányú képzésre.

A gazdasági képzések egyik legfontosabb, alapozó, módszertani tantárgya a statisztika. A statisztika nem egy tudomány, hanem a egy tudományközi módszertan, ami lehetővé teszi több szak (biológia, kémia, nyelvészet stb.) tárgykörén belül való felhasználását.

Ez a jegyzet, viszont a gazdaságstatisztikai elemzési módszertant domborítja ki, tehát a gazdálkodási és könyvelői szakokon tanuló diákok tudják leginkább hasznosítani.

A jegyzet egyrészt kifejti az elméleti alapjait az adott témakör módszertanának, majd pedig mintafeladatok és gyakorló feladatok segítségével elmélyíti a tanult anyagot, hogy a hallgató könnyebben megértse és a gazdasági életben hasznosíthassa a tanultakat.

A jegyzet kimondott figyelmet fordít arra, hogy a feladatmegoldás gazdaságilag értelmezve legyen, hogy értsék a hallgatók az összefüggéseket és a felhasználás valóságát.

Viszont ez a kiadvány csupán a Statisztika I. témaköreit dolgozza fel, melyek a következők:

- Statisztikai alapfogalmak
- Viszonyszámok
- Középértékek
- Változékonyság
- Indexámítások

Jó tanulást és sikeres felhasználást kívánok!

Beregszász, 2013.

Pataki Gábor,
II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola

I. Statisztikai alapfogalmak

1.1 Statisztika kialakulása, tudománytörténeti összefüggései

A statisztika szó a latin Status szóból származik, államot jelent. Ebből képezték a az államtudományokkal foglalkozó egyén megjelelölésére olasz nyelven a statista (államférfi) szót. Ebből ered a statistika, mely a gyakorlati politikusok számára szükséges ismereteket jelentette.
A tömegjelenségek jellemzőinek tömör, számszerű megismertetését szolgáló módszertana.

Statisztika kifejezés

- gyakorlati számbavételi tevékenység
- így nyert adatok összessége
- tömegjelenségek vizsgálatára szolgáló módszerek rendszere: meghatározott cél érdekében gyűjtött adatokat hogyan lehet feldolgozni, elemezni.

A vizsgálat tárgya a gazdasági, társadalmi és természeti jelenségek mennyiségi oldala, nem szakítva el a minőségi oldaltól alapvető matematikai ismeretekre való támaszkodás (mértani átlag, normális eloszlás, stb..)

<u>Ágazati statisztikák</u>

- **Társadalomstatisztika**
  - Népességstatisztika: népesség meghatározott időpontra vonatkozó számbavétele, népesség összetétele (nem, kor, foglalkozás, műveltség, anyanyelv, stb…), népesség változásának vizsgálata (születés, házasságkötés, halálozás, belső-külső vándorlás azaz migráció)
  - Igazságügyi statisztika
  - Igazgatási statisztika
  - Szociális statisztika
  - Kulturális statisztika
- **Gazdaságstatisztika**
  - termelés (ipar, mezőgazdaság), szállítás, hírközlés, város- és községfejlesztés (kommunális gazdálkodás), életszínvonal, nemzeti jövedelem (GDP) kérdéseivel foglalkozik

- **Jog és államtudomány területén:**
    - közigazgatási statisztika
    - igazságügyi statisztika
    - népességi statisztika

Ágazati statisztikák helyes művelésének előfeltétele annak a szaktudománynak az ismerete, melynek területén a statisztikai módszert alkalmazni kívánjuk.

<u>Statisztika kialakulása, története</u>

Végigkíséri az emberiség történetét, az emberi művelődés velejárója. A statisztika hasznos segítőtársa az embernek az állam irányításában, a társadalmi-gazdasági viszonyok megismerésére irányuló munkájában.

Az összeírási tevékenység kifejlődését hathatósan befolyásolta az erős központi hatalom kialakulása, a katona, rendőr és bíró mellett megjelent a statisztikus is.

<u>Kialakulásának 4 fő forrása:</u>

- összeírási tevékenység
- leíró statisztika
- kutató statisztika
- valószínűségszámítás és matematikai statisztika

<u>Összeírási tevékenység</u>

XVI.-XVII. századi összeírások

- **Dicalis összeírás (adóösszeírás)** XI-XVIII. századi társadalmi és gazdasági helyzetének megismeréséhez számszerű adatok. Adóösszeírások anyaga az adózás történetének megfelelően változott, bővült, átalakult. A történeti statisztika legrégibb formái, az 1530-1700-ig terjedő időre vonatkoznak, nagyrészt a jobbágynépességre tartalmaznak adatokat. Kihagy: zsellérek, pásztorok, kézművesek, földesúri birtokokon gazdálkodó népesség

- **Urbáriumok.** Földesúri összeírások (statisztikai leírás legősibb fajtái) XV. század elején: jobbágyok szolgáltatásait szabályozzák, XV. Század eleje, XI-XIV. századi urbáriumok történeti statisztikai célra még alig használhatók

XVI. századtól kezdve egyre inkább táblázatos forma

XVII-XVIII. század: tartalom egyre inkább kötöttebb, uradalmakhoz tartozó falvak, birtokok leírása, uradalomban élő népesség száma, társadalmi megoszlása (tisztviselő, jobbágy, házas, házatlan, zsellér, szolga, szolgáló, kézműves, pásztor), gyermekeinek száma, életkor, jobbágyok telkeinek nagysága, úrbéres szolgáltatások, állatállomány

- **Tized vagy dézsmajegyzékek**

  Világi és egyházurak a jobbágyokat a kilenced és a tized kiszedése útján adóztatták meg.

  Tized: egyház szedte: mindent amit Isten adott, egy tizedet az Istennek kell visszaadni

  Kilenced: földesúr szedte

  Kilenced és tizedjegyzékek alapján történt: ezekbe felvettek minden adóköteles terményt, jószágot, gabonát, bort. A jegyzékek adatai felelet adnak a jobbágyság számadataira, társadalmi megoszlására, terményei milyenségére terméseredményére, állatállományára, földbirtokára vonatkozóan. (párhuzam a mai korral: vagyon és adóbevallás) A jegyzékek 1650-től állnak rendelkezésre. Az Országos Levéltár XVI-XVII. Századi jegyzékeket őriz.

- **1715-20. évi összeírás** >>>>> Az 1696. évi összeírás volt az utolsó portális (dicalis) összeírás. Adózás ezt követően a tényleges földterület, a jobbágyság vagyoni helyzetének figyelembe vételével

  1715-20-as összeírásban először: iparosok, kereskedők is bekerültek

  Magyar jobbágyösszeírásban jobbágyok, zsellérek és szegények által művelt minden föld összeírása a föld minősége szerint (szántó, szőlő, erdő, stb..) ill. terméshozam összeírás is

<u>A XVIII. És XIX. Század fontosabb összeírásai</u>

- **Mária Terézia és II.József uralkodása alatt végrehajtott összeírások**
  - Nagyszombati Egyetemen Mária Terézia 1755-ben kötelezővé tette a statisztika oktatását
  - 2 évvel később önálló statisztikai tanszék felállítását rendelte el

- 1767 és 1777 között a jobbágyság úrbéres terheinek rendezése céljából adatgyűjtés: összeírták a jobbágyok földjét, rétjeiket, szőlőiket, a jobbágyföldeket a talaj minősége szerint osztályozták és aszerint állapították meg a járulékot. Adatokból megállapítható: úrbéres parasztság száma, társadalmi megoszlása, vagyoni helyzete
- II. József intézkedése: 1784-87-es népszámlálás, házak számozása, a telekkönyv ősét életre hívó földmérés, iskolareformok, a feloszlatott szerzetesrendek vagyonának kezelésével kapcsolatos leltározási munkák, stb…

- **1784-87. évi népszámlálás**
  - legátfogóbb összeírása e századnak a II. József féle népszámlálás. A klérus monopóliumának megnyirbálása, az állam erejéről, a népesség számáról, összetételéről eddig csak az egyház bírt tudomással. Az összeírásig nem volt ismert az ország teljes népessége, a demográfiai helyzetről nem volt adat, nem volt ismert a népesség foglalkozási megoszlása. Népszámlálás: minden falu, járás, megye népességi, szociális, kulturális viszonyainak megismerése. Hiányosság: csak a férfiakat kérdezte részletesen, a nőktől csak egy adatot.

- **A XIX. Századi összeírások**
  - II József halála után az 1804-05-ös összeírás következett, lajstromos kérdőíven. Az összeírás egysége a család, illetve a háztartás. Minden személy 1-1 sorban, név, születési év, a férfi lakosságra foglakozást is kérdezett, kor és vallási megoszlást is. Tartalmazat a távollévők és az ideiglenesen jelenlevők számát. Az összeírás megyei anyagát az Országos Levéltár illetve egyes vidéki (soproni, csongrádi) levéltárak őrzik, az egri érseki levéltár pedig az összeírás főösszesítését.
  - A hivatalos statisztikai összeírások előtt még három nagyobb összeírás a történeti statisztika tárgykörében: 1828. évi, 1848. évi népszámlálásszerű városi összeírás és az 1850-51. évi és az 1857. évi osztrák népszámlálás.

Statisztikailag leginkább használható helységnévtár Nagy Lajos készítette el.

Fényes Elek: XIX. Század első felének legnagyobb magyar statisztikusa.

Leíró statisztika

A statisztikai tudomány leíró iránya az államok különböző viszonyainak leírásán túl nem megy, az ország földrajzi fekvését, éghajlatát, terményeit, gazdálkodását, állatállományát és közigazgatását írja le számok nélkül és főleg anélkül, hogy a vizsgált jelenség okaira rámutatna.

Kiemelkő Zeiler Márton német nyelvű műve: Descriptio Hungariae, oder die Beschreibung des Königreichs Ungarn című Ulmban 1646-ban kiadott műve.

Meg kell még említeni Bél Mátyást, művei között éppúgy találunk földrajzi, történeti, mint neveléstudományi, irodalomtörténeti munkákat.

Kutató statisztika

Angliában fejlődik ki. Nem az államnevezetességek leírására, hanem a polgári termelési viszonyok között fennálló összefüggések vizsgálatára használják.

Az itt kialakult statisztikának ma politikai aritmetika nevet adták.

A kutató statisztika előkészítése 1848 után Magyarországon az Akaémia keretében szervezett Statisztikai Bizottságban fejlődött ki, Weininger Vince, Bitnicz Lajos után Kőrösi József és Keleti Károly munkássága nyomán. Hunfalvy János: a műegyetem első statisztikai tanára

Keleti Károly: Statisztikai Hivatal főnöke. Kiemelkedő munkásság, magyar hivatalos statisztika jeles képviselője. Nemzetközi vonatkozásban megszerezte a külföld elismerését.

Kőrösi József: a fővárosi statisztikai hivatal igazgatója, nagy városok statisztikája

Thirring Gusztáv: demográfiai, történeti statisztikai tanulmányok, népességtörténeti tanulmányai

Informatika szerepe a statisztikában: adatfeldolgozás mennyisége és gyorsasága

1.2 Statisztikai sokaság és ismérv

1.2.1 Statisztikai sokaság

Definíció: a statisztikai megfigyelés tárgyát képező egyedek összessége, halmaza
Pl.: A II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola hallgatóinak száma 2012. október 1.
A sokaság konkrét meghatározásakor három fontos kérdésre kell tudnunk választ adni:

MI?	*HOL?*	*MIKOR?*
Főiskola hallgatói	Kárpátaljai	2012. október 1.

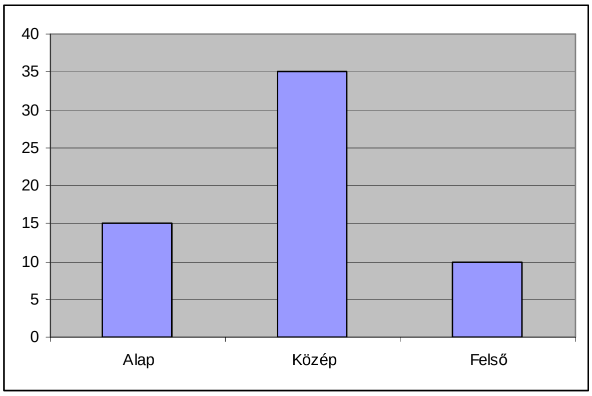
Egység
Definíció: a sokaságot alkotó egyedeket a sokaság egységegeinek nevezzük.
Pl.: Kiss István, a II. RF. Kárpátaljai Magyar Főiskola I. évfolyamos hallgatója 2012. október 1-én.

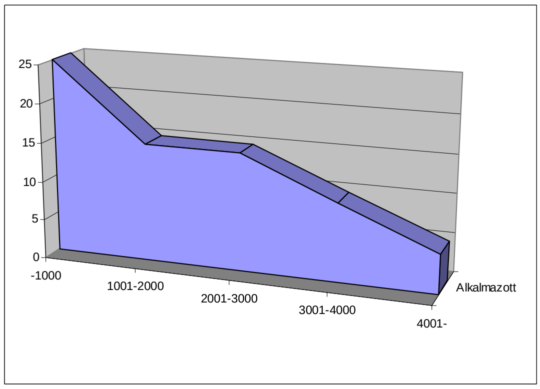
Ismérv
Definíció: olyan kritérium, vagy kritérium rendszer, amelyek szerint a sokaság egységeit jellemezni tudjuk.
Azokat a tulajdonságokat, amelyek a sokaság valamennyi egységét jellemzik közös ismérveknek, azokat pedig, amelyek tekintetében a sokaság egységei nem egyformák, megkülönböztető ismérveknek nevezzük.
Pl. Közös: Kiss-Kereskedő Kft-nél dolgozó személyek; Megkülönböztető: Kiss-Kereskedő Kft-nél dolgozók végzettség alapján történő megkülönböztetése (30 % felsőfokú, 70 % középfokú).

Az ismérvek hármas tipizálása alapján megkülönböztetünk:

- Tárgyi ismérv:
    - Mennyiségi
    - Minőségi
- Időbeli
- Területi

Mennyiségi ismérvek olyan számértékkel meghatározott megkülönböztető jelzőszámok, melyek valamely mennyiségi paraméter alapján bontja szét a sokaságot (életkor, testmagasság, lábméret).
A mennyiségi ismérvek lehetnek diszkrét és folytonos változatú. A diszkrét mennyiségi ismérv csak véges vagy megszámlálhatóan sok, egymástól jól elkülöníthető értéket vehet fel. A folytonos mennyiségi ismérv egy adott intervallumon belül bármilyen, tehát kontinuum számosságú értéket vehet fel.
Pl. diszkrét mennyiségi ismérv – a vállalat dolgozóinak megoszlása végzettség alapján (x/a. számú ábra). Folytonos mennyiségi ismérv – a vállalat dolgozóinak megoszlása bérkategória alapján (x/b. számú ábra).





A mennyiségi ismérvek osztályközbe való rendelése (1001-2000 UAH) azért is indokolt több esetben, mert az ismérvváltozatok végtelen sok variációja miatt a statisztikai közlés átláthatósága és egyszerűsége is megkívánja ezt a módozatot. Valamint bizonyos esetekben (pl. kérdőíves felmérés) eleve csak így gyűjthetők be az adatok.
Minőségi ismérvek valamely minőségi jellemző alapján szelektálja a sokaság egységeit: nem, foglalkozás, hajszín, tevékenységi kör.
Időbeli ismérvek az időbeli változást alapul véve szelektál, pl. a vállalat éves árbevételének megoszlása az év hónapjaiban.
Területi ismérvek földrajzi megjelölés alapján szelektál, pl. ország, megye, város, község.

Az ismérveket még olyan módon is csoportosíthatjuk, hogy:

1. Két változattal rendelkezik: alternatív ismérv – ilyenkor ez a tulajdonság meglétét vagy hiányát is kifejezheti (pl. nem).
2. Több változattal rendelkezik (pl. végzettség).

1.2.2 Mérési skálák

Az ismérvek tipizálásnál fontos megismerni a mérési skálákat. Ezek négy csoportra sorolhatóak:

1. *Nominális skála:*
   a. Ez a legegyszerűbb, ez szolgáltatja a legkevesebb információt
   b. Segítségével csak az ismérvek azonossága vagy különbözősége állapítható meg, pl: férfi vagy nő
2. *Ordinális skála*
   a. Ismérvértékek közötti sorrend is megállapítható
   b. Sorrendbe lehet rakni, de nem lehet az állítások között távolságot meghatározni
   c. pl: egészség (különböző szintek: nagyon jó, jó, közepes, rossz), katonai rendfokozat, stb.
3. *Intervallumskála*
   a. Kezdőpontja önkényesen választott, ezért az ismérvek sorrendje és különbsége értelmezhető, de aránya nem
   b. pl: IQ, Celcius
4. *Arányskála*
   a. A kezdőpontnak önálló jelentése van, adatain minden matematikai művelet értelmezhető
   b. pl: jövedelem, tömeg, testsúly, magasság, távolság stb.

1.3 Statisztikai adat és mutatószámok

1.3.1 Statisztikai adat

Definíció: valamely statisztikai sokaság tagjainak száma, vagy a sokaság valamilyen számszerű jellemzője. A statisztikai adatot körbevesszük fogalmi jegyekkel: adatazonosítók (mi? mol? mikor?), mennyiségi, minőségi, időbeli és területi azonosítók, valamint számérték és a hozzá kapcsolód mértékegység.

Statisztikai számok

Definíció: eredetük szerint abszolút és leszármaztatott számok lehetnek.

Abszolút: közvetlen mérés, számlálás útján jön létre (pl. Beregszász város lakosainak száma a 2001-es népszámlálási adatok tükrében). Az abszolút számok származhatnak elsődleges (primer) adatokból, amikor saját kutatás, gyűjtés alapján áll elő a statisztikai szám, vagy pedig másodlagos (szekunder) forrásból, mely estében mások által begyűjtött, de különálló adatok összegzésével, új elvek szerinti rendszerezésével áll elő az abszolút szám.

A másik nagy kategóriába a leszármaztatott számok tartoznak. Ebben az esetben különböző matematikai-statisztikai műveletek elvégzésével jutunk a származtatott adathoz. Pl. a vállalatnál dolgozó nők százalékos aránya.

A leszármaztatott számokat három fő kategóriába soroljuk:

- viszonyszámok;
- átlagok, középértékek;
- indexek.

1.3.2 Mutatószám

Definíció: mutatószámnak nevezzük azokat az abszolút, illetve leszármaztatott statisztikai adatokat és adatkategóriákat, amelyekkel valamilyen rendszeresen megismétlődő társadalmi, gazdasági jelenséget statisztikailag jellemezni tudunk. A teljesség igénye nélkül néhány ilyen mutató lehet: termelékenységi, hatékonysági, hitelképességi, munka színvonalát jellemző, jövedelmezőségi stb. mutatók.

A mutatószámok többnyire leszármaztatott számok, amelyek nem egyszer elemi modelleknek tekinthetők.

Modell

Definíció: a valóság lényegi összefüggéseit tömören jellemző logikai, matematikai, statisztikai konstrukciók.

Ilyen modelleknek számítanak pl. a regisztrációs függvények, vagy az operációkutatásban a lineáris programozási modellek.

1.3.3 Statisztikai munka szakaszai

A munka négy fő szakaszra bontható: 1. programkészítés, 2. adatgyűjtés, 3. adatfeldolgozás, 4. elemzés, értékelés, közzététel.

1. **Statisztikai programkészítés lépései:**
    a. Célkitűzés megfogalmazása
    b. Elemzés megtervezése
    c. Adatfeldolgozási terv készítése
    d. Szervezési feladatok

    Bár a konkrét munkavégzés itt még nem kezdődik el, viszont ahhoz, hogy a statisztikai munkánk sikeres, költséghatékony és minél alacsonyabb hibafokkal menjen végbe, fontos, hogy a tervezés alapos, jól átgondolt és a visszacsatolásokat jól beépített formájú legyen.
2. **Adatgyűjtés lépései:**

    Az alábbi kérdésekre kell választ adnunk az adatgyűjtés elkezdése előtt:
    - milyen adatokkal kívánunk dolgozni? (abszolút vagy leszármaztatott számok; primőr vagy szekunder adatok)
    - milyen csoportosításban?
    - mlyen adatszolgáltatótól származnak majd az információk?

    Az adatgyűjtés módjai:
    a. közvetlen megfigyelés
    b. kikérdezés
    c. önszámlálás

    Az adatfelvételt aszerint is szükséges megkülönböztetünk, hogy megfigyelt sokaságot milyen mértékben vesszük számba. Ennek megfelelően vank:
    a. Teljes körű: a sokaság minden egyedét megfigyeljük,
    b. Részleges adatgyűjtés:
        - Reprezentatív: véletlenszerűen válasszuk ki a minta adatokat, valamint az alapsokaság valamennyi egységének ugyanazt az esélyt biztosítjuk a mintába való bekerülésre, továbbá a kiválasztott elemek függetlenek egymástól.
        - Kontrollált kísérlet: főleg a mezőgazdaság területén vált be ez a módszer.
        - Nem reprezentatív megfigyelés.

3. **Adatfeldolgozás:**
   Az adatgyűjtésnél előálló adattömeg rendszerezett, átlátható, többnyire leszármaztatott számokká átalakított tömör formája, amely alkalmassá teszi a szerzett adatot publikálásra, további statisztai elemzéseknek való felhasználásra.

4. **Elemzés, értékelés, közzététel:**
   Az utolsó lépésnél használjuk azokat a statisztikai elemző módszereket, melyek jelen jegyzet fő tananyagát is képezi. Ezekkel az elemzésekkel tudunk levonni olyan társadalmi-gazdasági életre vonatkozó elemzéseket, melyek a puszta számokon túl valós tartalmi jellemzőkkel bírnak.

1.3.4 Statisztikai munka során előforduló hibák

A statisztikai munka miden fázisában adódhatnak hibák az adatfelvétel, feldolgozás, értékelés során. Pl. felvétel: besorolási hibák (háztartásoknál: nem elérhető, már nem létezik, nem háztartás valójában); felmérés: válaszadási hibák, ill. a felmérő biztos által generált hibák.

A mintavételezésnél a hiba abból adódik, hogy nem az egész mintát figyeltük meg. Mivel a hibára előre számítunk, így azt is megtudjuk adni, hogy bizonyos valószínűségi paraméterek között milyen szintű hibafokra tudunk gondolni.

Szignifikáns számjegy: azon számjegyek, melyek pontosságát még garantálni lehet;

1.4 Statisztikai sorok és táblák

A statisztikai elemzések, elemzési módszerek alkalmazásának feltétele a statisztikai adatok sorokba történő rendezése. A sorokba rendezés csoportosítást vagy összehasonlítást tesz lehetővé.
Definíció: a statisztikai adatok valamilyen szempontok szerinti felsorolását statisztikai soroknak nevezzük.
A statisztikai sor két egymással összefüggő felsorolást tartalmaz:
1. egyrészt a csoportosító vagy összehasonlító ismérvek, ill. azok változatainak felsorolását;
2. másrészt a hozzájuk tartozó előfordulások (gyakoriságok) vagy értékek (értékösszegek) megadását.

Statisztikai sorok keletkezésének módjai:

- egy sokaság egynemű adatainak csoportosítása, osztályozása
- egy sokaság egynemű adatainak térbeli vagy időbeli összehasonlítása
- egyazon jelenségre, társadalmi vagy gazdasági egységre vonatkozó, többféle sokaság különnemű adatainak felsorakoztatása.

1.4.1 Statisztikai sorok altípusai:

1. csoportosító sor
2. összehasonlító sor
3. leíró sor

Csoportosító és összehasonlító sorok: ismérvtípusai alapján lehetnek:

- mennyiségi-, (pl. csoport hallgatóinak súly szerinti megoszlása)
- minőségi-, (pl. a főiskola hallgatóinak megoszlása hajszín szerint)
- területi- (pl. a főiskola hallgatóinak megoszlása származási helyszín szerint, járások alapján) és
- idősorok (pl. a csoport hallgatóinak rendezése születési év/hónap szerint).

Az ismérvek száma alapján megkülönböztetünk:

- egyszerű sorokat: egy ismérv szerinti csoportosítás,

- kombinatív sorokat: több ismérv szerinti csoportosítás.

A csoportosító sorok általános alakja:

Ismérvváltozatok	**Az előfordulások száma**	**Értékösszeg**
X_1	f_1	s_1
X_2	f_2	s_2
…	…	…
X_j	f_j	s_j
…	…	…
X_k	f_k	s_k
Összesen:	**N**	**S**

Az ábrán látható betűk jelentése:

- X_i = a csoportképző ismérv változata (i= 1, 2, … , k)
- f_i = gyakorisági mutató (részsokaság)
- s_i = értékösszeg (részsokaság)
- N = a sokaság egységeinek a száma (fősokaság)
- S = a sokaság egészének értékösszege.

Mintapélda:

Kiss-Iparos Kft. tevékenységi területenkénti árbevétel megoszlása 2012-ben.

Tevékenységi terület	**Árbevétel (UAH-ban)**
Mezőgazdasági termelés	25 000
Fafeldolgozás	42 000
Építő alapanyagok előállítása	39 000
Összesen:	**106 000**

Összehasonlító sorok

Az összehasonító sorok is egynemű (azonos fajtájú, ill. mértékegységű) adatokból állnak, de összegzésüknek nincs értelme, mert az adatok vagy nem értelmezhetőek összegezve, vagy a felsorakoztatásuknak nem ez volt a célja.

Az összehasonlító sorok általános alakja:

Ismérvváltozatok	Az előfordulások száma	Értékösszeg
X_1	f_1	s_1
X_2	f_2	s_2
…	…	…
X_j	f_j	s_j
…	…	…
X_k	f_k	s_k
Összesen:	**N**	**S**

<u>Mintapélda:</u>

***Kiss-Gazda Kft. földterületének megoszlása Kárpátalja járásaiban (2011)*.**

Járás megnevezése	Földterület (Ha)
Beregszászi	15
Szöllősi	22
Ungvári	13
Munkácsi	20
Összesen:	**70**

A folytonos mennyiségi ismérveknél szinte mindig, a diszkért ismérveknél pedig akkor, ha azok nagyobb számú ismérvértékkel rendelkeznek, az osztályközökre való bontást használjuk. Az osztályközök kialakításánál két problémát kell megoldani:
- milyen hosszúak legyenek az osztályközök?
- milyen értéket tekintsünk osztályhatárnak?

Az osztályhatárokat ott kell megjelölni, ahol a mennyiségi változás egyidejüleg a minőség lényeges megváltozásával jár együtt. Az egyes osztályok határait (alsó és felső) úgy kell kijelölni, hogy az ismérvértékek folyamatosan és egyértelműen besorolhatók legyenek az egyes osztályközökbe.

Ennek megfelelően a következő jellemzőket kell meghatározni az osztályközök kijelölésénél:

- Az egyes osztályok alsó és felső határértékeit;
- A határértékek különbségeit, az osztályok hosszának (intervallumának) nagyságát;

- Az osztályok határértékeinek átlagát, osztályközép (U_i).

Mintapélda:

Best Kft. alkalmazottjainak megoszlása fizetés alapján 2013. februárjában.

Havi fizetés (UAH)	**Alkalmazottak száma (fő)**	**Becsült havi fizetés**
900 – 1 200	5	5 250
1 201 – 1 500	15	20 250
1 501– 1 800	18	29 700
1 801 – 2 100	12	23 400
2 101 –	10	22 500
Összesen:	**60**	**101 100**

A 60 alkalmazott kimutatása bár elvben lehetséges diszkrét gyakorisági sorban, de értelemszerűen osztályközös gyakorisági sorba való rendezése átláthatóbbá és közölhetőbbé teszi az adathalmazt.
A fizetési értékek alsó és felső értékét kell alapul venni az osztályközök kijelölésénél. Bár nem kötelező, de szerencsésebb egyenlő szélességű intervallumokat használunk (jelen példánál 300 UAH-val változnak az értékek). Az osztályok kijelölésénél szerencsés, hogy az osztályba kerülés kb. egyforma nagyságrendet eredményezzenek.
Amennyiben a fizetések valós értékét nem tudjuk, csak annyi információnk van, hogy melyik osztályközbe milyen gyakorisággal szerepelnek az alkalmazottak, akkor ilyen esetben csak becsült fiztési értékeket tudunk számítani. Jelen példában a 60 alkalmazott havi becsült összes fizetése 101 100 UAH.

A mennyiségi sorokat altípusokra bontjuk, melyek a következők:

- **Gyakorisági sor:** a mennyiségi ismérv szerinti osztályozás eredményeként kapott speciális csoportosító sor.

Ha a mennyiségi ismérv diszkrét és kevés változattal rendelkezik (pl. a családok gyerekszáma), akkor a gyakorisági sorban minden ismérvértéket felsorolunk.

Ha a mennyiségi ismérv folytonos, vagy diszkrét ugyan, de az általa felvehető értékek sokfélék lehetnek (pl. az aktív keresőket havi keresetük szerint csoportosítjuk), akkor az ismérvértékek tartományát egymást át nem fedő intervallumokra, ún. **osztályközökre** bontjuk. Az így képzett sort osztályközös gyakorisági sornak nevezzük.

A **gyakoriság** (fj) azt mutatja, hogy a mennyiségi ismérv szerint képzett egy-egy osztályba a sokaságnak hány egysége tartozik.

- **Relatív gyakorisági sor:** megmutatja, hogy a mennyiségi ismérv szerint képzett egy-egy osztályba (osztályközbe) a sokaságnak hányad része (hány százaléka) tartozik.

  A **relatív gyakoriságok (g_j)** nem mások, mint a gyakoriságokból számított megoszlási viszonyszámok:

$$g_i = \frac{f_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{f_i}{n}$$

f_i: az i-edik osztályhoz (osztályközhöz) rendelt gyakoriság,

g_i: az i-edik osztályhoz (osztályközhöz) rendelt relatív gyakoriság,

n: a sokaság/minta elemszáma.

- **Kumulált gyakorisági/relatív gyakorisági sorok:** a gyakorisági/relatív gyakorisági sorokban rejlő információk tovább bővíthetők a gyakoriságok/relatív gyakoriságok halmozott összeadásával, azaz kumulálásával.

  Megkülönböztetünk:

  - felfelé, illetve
  - lefelé kumulált gyakorisági/relatív gyakorisági sorokat.

  A felfelé kumulált gyakoriságok (f_i'), illetve **relatív gyakoriságok (g_i'**) adatai azt mutatják, hogy az adott osztályköz felső határának megfelelő és annál kisebb ismérvértékek hányszor (f_i'), illetve milyen arányban (g_i**'**) fordulnak elő. A kumulált gyakorisági, illetve relatív gyakorisági sorokat úgy képezzük, hogy a gyakoriságokat, illetve relatív gyakoriságokat rendre halmozva összeadjuk felülről lefelé haladva.

A lefelé kumulált gyakoriságok (f_i”), illetve **relatív gyakoriságok (g_i”)** adatai azt mutatják, hogy az adott osztályköz alsó határánál nagyobb ismérvértékek hányszor (f_i”), illetve milyen arányban **(g_i”)** fordulnak elő.

- **Értékösszegsor**: a mennyiségi ismérv alapján kialakított osztályokhoz (osztályközökhöz) az azokba tartozó egységek ismérvértékeinek összegét rendeli.

A vizsgált mennyiségi ismérv értékeinek egyes osztályokon (osztályközökön) belüli összegeit értékösszegeknek (S_i) nevezzük.

Az egyes osztályokhoz tartozó értékösszegeket (S_i) az ismérvértékek (x_i) és a gyakoriságok (f_i) szorzataként kapjuk:

$$\boldsymbol{S_i = f_i \times x^i}$$

A sokaság teljes értékösszege (S):

$$\sum_{i=1}^{k} S_i = S$$

Ha csak az osztályközös gyakorisági sor áll rendelkezésre, akkor az értékösszegeket (S_i) a gyakoriságok (f_i) és az osztályközepek (x_i) szorzataként becsüljük.

Az i-edik osztályközép:

$$x_i = \frac{x_{ia} + x_{if}}{2}, \text{ ahol}$$

x_i: az i-edik osztályközép

x_{ia}: az i-edik osztályköz alsó határa

x_{if}: az i-edik osztályköz felső határa

- **Relatív értékösszegsor:** az értékösszegek megoszlását mutatja.

  Relatív értékösszegen (Z_i) olyan megoszlási viszonyszámot értünk, amely az egyes osztályok értékösszegét (S_i) a teljes értékösszeghez (S) viszonyítja.

$$Z_i = \frac{S_i}{S}$$

- **Kumulált értékösszegsor**: a gyakorisági sorokhoz hasonlóan az értékösszegsorból és a relatív értékösszegsorból is képezhetünk felfelé kumulált (Z_i'), illetve lefelé kumulált (Z_i") sorokat.

<u>**Mintapélda**</u>

Egy kárpátaljai vállalatnál 60 alkalmazott dolgozik. 2010-ben az alábbi kereseti adatokat ismerjük vállalat dolgozóiról:

Nettó kereset Hr/hó	**Alkalmazottak száma**
	fő
-700	*10*
701- 1400	*30*
1401-2100	*15*
2100-	*5*
Összesen:	**60**

Feladat:

a) Állapítsa meg a statisztikai sor és az ismérv típusát!
b) Készítsen relatív gyakorisági sort, becsült értékösszegsort, ill. relatív értékösszegsort. Kumulálja a gyakoriságokat, a relatív gyakoriságokat, az értékösszegeket és a relatív értékösszegeket!
c) Értelmezzen egy-egy adatot minden egyes statisztikai sorból!

Megoldás:

a) Osztályközös gyakorisági sor, diszkért mennyiségi ismérv.
b)

Jövedelem Hr/hó	Meg-oszlás, gyak-oriság	Relatív gyak.	Kumulált gyak. felfelé	Komulált gyak . lefelé	Osztály közép	Érték-összeg	Relatív érték-összeg	Komulált relatív gyak. lefelé	Komulált relatív gyak felfelé
	f_i	g_i	f_i'	f_i''	u_i	S_i	Z_i	g_i'	g_i''
-700	*10*	0,167	10	60	350	3500	**0,05**	0,167	1
701- 1400	*30*	**0,5**	40	**50**	1050	31500	0,45	0,667	**0,833**
1401-2100	*15*	0,25	**55**	20	1750	26250	0,375	**0,917**	0,333
2100-	*5*	0,083	60	5	1750	**8750**	0,125	1	0,083
Összesen:	**60**	**1**	**-**	**-**	**-**	**70000**	**1**	**-**	**-**

c) Adatok gazdasági értelmezése (a táblázat feketével szedett értékei):

[0,5]: A vállalatnál dolgozók 50 %-a keres 700 és 1400 UAH között.

[55]: Ilyen számban keresnek kevesebbet, mint 2100 hrivnya.

[50]: A cégnél 50 alkalmazottnak nagyobb a fizetése, mint 700 UAH.

[8750]: Becsülhetően azok az alkalmazottak (5 fő), akik többet keresnek, mint 2100 UAH, ők összesen adott hónapban 8 750 UAH-t kapnak nettóban.

[0,05]: 5 % azoknak az aránya a teljes bérkifizetésből, akik a vállalatnál kevesebb, mint 700 UAH-t keresnek.

[0,917]: Akik kevesebb, mint 2100 hrivnyát keresnek, azok az összes bérkifizetés 91,7 %-át viszik haza összesen.

[0,833]: Akik többet, mint 700 UAH-t keresnek, azok az összes bérkifizetés 83,3 %-át viszik haza.

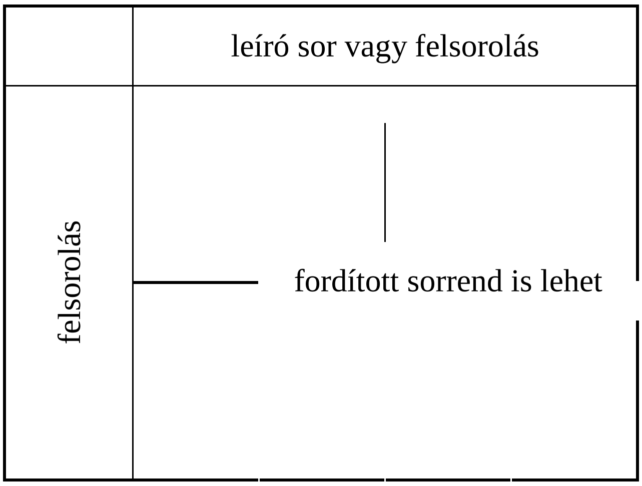
1.4.2 Statisztikai táblák

Ahogyan a statisztikai sorok bemutatásánál is megfigyelhettük, a statisztikai sorok táblázatokba foglalva jelentek meg. A táblák a statisztikai munka valamennyi szakaszának fontos segédeszközei, hiszen az adatok feldolgozását, elemzését és az imények közzétételét is ezek által tehetjük áttekinthetőbbé.

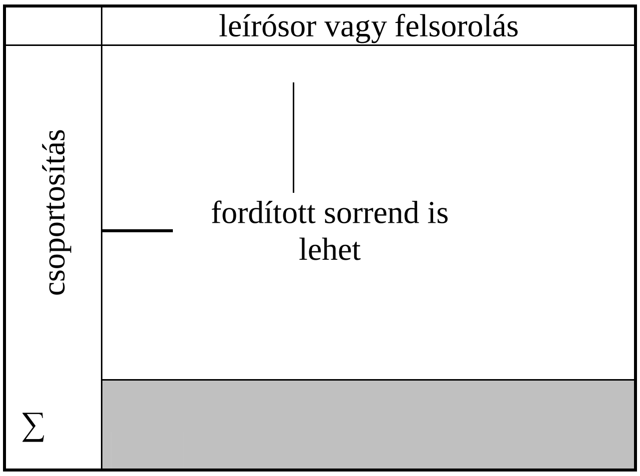
Általános meghatározásunk szerint mégis azt mondjuk, hogy a statisztikai egymás mellé, illetve egymás alá illesztett statisztikai sorok összefüggő rendszerei.

A statisztikai táblákat a bennük foglalt statisztikai sorok fajtái, illetve azok készítésének módjai szerint különböztetjük meg.

Egyszerű tábla

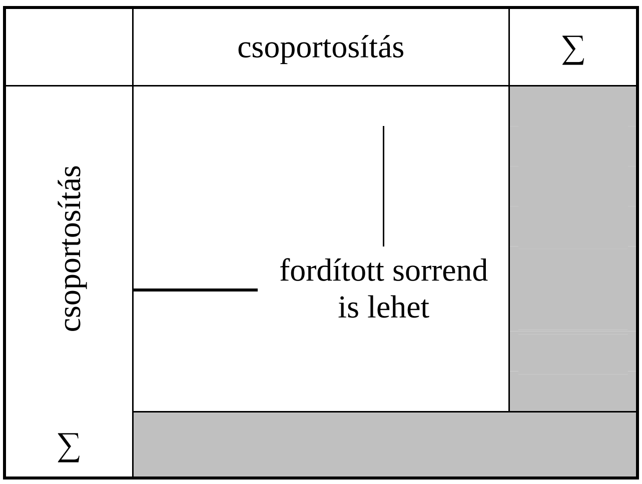


Csoportosító tábla



A csoportosító sorokat csoportosító táblákba foglaljuk. A táblázat adati vagy sor, vagy oszlop szerint összesíthetők.

Kombinációs tábla



Lehetőségünk van arra is, hogy a csoportosítást egyszerre több ismérv szerint (kombinatív csoportosítással) is elvégezhetjük. Főleg akkor tesszük ezt, ha az ismérvek közötti kapcsolatok feltárása a célunk. Ilyenkor a kombinatív csoportosítás eredményeit kombinációs táblázatba foglaljuk.

A statisztikai táblák szerkezetileg két fő részre oszthatóak:

- Szöveges magyarázó részre
- Adatokat tartalmazó táblamezőkre.

Táblázatok általános felépítése

	Fejrovatok			Összesen
			Oszlop	Összesítő oszlop
	S o r			
	Rekesz			
Összesen	Részösszegek			Főösszeg

Elemi formai követelmény a vizsgálat céljának legmegfelelőbb táblatípus kiválasztása és megszerkesztése, címmel történő ellátása, a megnevezések fej- és oldalrovatokban történő elhelyezése, ennek megfelelő hálózat készítése, a mértékegységek, az adatok tartalmára vonatkozó megjegyzések (ha szükséges), illetve az -adatok forrásaira történő hivatkozások feltüntetése.

A tartalmi követelmények a táblázat adatokkal történő kitöltéséhez kapcsolónak. Ennek megfelelően a táblamező valamennyi rekeszének információt kell közölnie, mégpedig vagy statisztikai adat formájában, vagy pedig mindenki által egységesen értelmezett jelölések formájában. A használható jelölések és azok tartalma a következő:

- (-) a jelenségre nincs adat
- (...) a jelenségre a valóságban létezik adat, de nekünk nem áll rendelkezésünkre

- 0,0 a táblázatban megadott mértékegységhez viszonyítva a rendelkezésünkre álló adat igen kicsi értékű
- (+) az adat jobb felső oldalán becslés eredményére utal
- (*) ugyancsak az adat jobb felső oldalán jelzi, hogy megjegyzést fűztünk az adathoz.

Tartalmi követelmény továbbá a táblázat adatainak (statisztikai sorainak) szakmai, logikai áttekinthetősége, illetve a táblázatban végzett műveletek (pl. ösz- szegzések) számszaki helyessége.

A statisztika általános elméletének fogalmai szerint a mérlegek is speciális statisztikai táblák, noha előfordulásuk inkább az elemzési körben szokványos. Két leggyakoribb formája:

- az ún. „könyvviteli típusú" - álló és mozgó sokaságok közötti összefüggésen alapuló - mérleg és
- az ún. „sakktáblaszerű" - mozgó sokaságokkal elszámoló - mérleg szokott előfordulni.

A mérlegmódszer alkalmazása különösen jelentős a demográfiában, illetve a gazdaságstatisztikában. A sakktáblaszerű mérlegek felhasználásának kiemelt területe az ágazati kapcsolatok mérlegének összeállítása.

1.5 Mintafeladatok

I.1. mintafeladat

Az alábbi felsorolásból döntse el, hogy mely sokaság milyen kategóriába sorolható (álló, mozgó, diszkrét, folytonos, véges, végtelen). Egy jellemző akár több kategóriába is besorolható!

- Spanyolország népessége
- A 18 éven aluliak cukor fogyasztása 2005-ben
- A 2009-ben legyártott Ferrarik száma
- Ukrajna alkohol fogyasztása 2012-ben
- Kárpátalja népessége 2012.02.01-én

Megoldás:

Megnevezés	Típus
Spanyolország népessége 2009-ben	Véges, mozgó, diszkrét
A 18 éven aluliak cukor fogyasztása 2005-ben	Véges, mozgó, folytonos
A 2009-ben legyártott Ferrarik száma	Véges, mozgó, diszkrét
Ukrajna alkohol fogyasztása 2012-ben	Véges, mozgó, folytonos
Kárpátalja népessége 2012.02.01-én	Véges, álló, diszkrét

I.2. mintafeladat

Az alább felsorolt ismérvek (változók) mennyiségi vagy minőségi ismérvek?

Milyen mérési skálán mérné őket?

- Egy villanykörte várható élettartama
- Egy villanykörte márkája
- Egy részvény hozadéka
- Egy vállalatnál egy hét alatt bekövetkezett balesetek száma
- A balesetek típusa
- A munkára megjelentek száma

Megoldás:

Megnevezés	Ismérv / skála
Egy villanykörte várható élettartama	Időbeli / Intervallum
A villanykörte márkája	Minőségi / Nominális
Egy részvény hozadéka	Mennyiségi / Arány
Egy vállalatnál egy hét alatt bekövetkezett balesetek száma	Mennyiségi / Arány
A balesetek típusa	Minőségi / Nominális
A munkára megjelentek száma	Mennyiségi / Arány

I.3. mintafeladat:

Készítsen összehasonlító sort az alábbi felsorolásból:

Országok:	Hollandia	Magyarország	Ausztria	Litvánia	Ukrajna
1 főre jutó csokifogyasztás (gramm)/év	2560	3542	3321	1211	1456

Megoldás:

Országok	1 főre jutó csokifogyasztás (gramm)/év
Hollandia	2560
Magyarország	3542
Ausztria	3321
Litvánia	1211
Ukrajna	1456

I.4. mintafeladat:

Készítsen csoportosító sort az alábbi adatokból:

> *A 2007-es évben a magyar autósok 43,4%-a tankolt 95-ös benzint, 36,6% gázolajat, 18,9% 98-as benzint, 0,8% etanolt és a fennmaradó hányad keveréket tankolt.*

Üzemanyag	Megoszlás
Benzin (95)	43,4%
Benzin (98)	18,9%
Gázolaj	36,6%
Etanol	0,8%
Keverék	0,3%
Összesen	**100%**

I.5. mintafeladat:

Készítsen leíró sort Brazíliáról, ha tudjuk, hogy 8 511 965 km^2 nagyságú területen helyezkedik el, 188 100 000 lakosa van, a népsűrűség 22 fő/ km^2 és az egy főre eső GDP 8500 USD!

Megoldás:

Brazília főbb adatai	
Terület	8 511 965 km2
Lakosság	188 100 000 fő
Népsűrűség	22 fő/ km2
GDP / fő	8500 USD / fő

I.6. mintafeladat:

Készítsen statisztikai táblát az alábbi adatok felhasználásával:

2006-ban a külföldre utazó ukránok száma 15.432,8 ezer fő volt, 2009-re ez 23%-kal emelkedett. 2006-ban a kiutazók 78%-a közúton hagyta el az országot, ez az arány 2009-re megnőtt 84%-ra. 2006-ban 11%-uk utazott vonaton, 2009-re ez nem változott. A repülőn utazók száma 2006-ban 1697,61 ezer fő volt, míg 2009-ben 949,12 ezer fő.

Megoldás:

Utazások		
Típus	***2006***	***2009***
Közút	12 037,58	15 945,17
Vonat	1 697,61	2 088,06
Repülő	1 697,61	949,12
Összesen	**15 432,80**	**18 982,34**

Számítások:

18 982,34: a 2006-os érték emelkedett 23 %-al, tehát 15 432,8 × 1,23-al.

12 037,58: ilyen számban hagyták el az országot közúton; 15 432,8 × 0,78-al

15 945,17: 2009-ben már 84 %-ban hagyták el az országot közúton; 18 982,34 × 0,98-al

A többi számítást hasonló képen kell elvégezni.

I.7. mintafeladat:

Készítsen statisztikai táblát az alábbi adatok felhasználásával:

> *Egy középiskola első évfolyamába 150 diák jár. 22%-uk A osztályba, 30%-uk B osztályba, 24%-uk C osztályba, és a többi diák fele D osztályba jár, a másik fele pedig az E osztályba. Az A osztály 100%-a lány, a B osztály 60%-a fiú, a C, D, E osztályok 50%-a lány.*

Megoldás:

Az első évfolyam megoszlása			
Osztályok:	***Lányok***	***Fiúk***	**Összesen**
A osztály	33	0	33
B osztály	18	27	45
C osztály	18	18	36
D osztály	9	9	18
E osztály	9	9	18
Összesen:	**87**	**63**	**150**

I.8. mintafeladat:

Egy cégnek összesen 500 alkalmazottja van, 300 fizikai munkás és 200 adminisztratív alkalmazott. A cégnél összesen 200 nő dolgozik. A 40 éven aluli alkalmazottak száma 190, ebből 90 nő. A 40 év alatti női fizikai munkások száma 40, a 40 éven felüli férfi fizikai munkások száma 50.

Készítsen kombinációs táblát, melyben feltünteti a foglalkoztatottakat a megadott számok szerint (a foglalkozási osztály az oldalrovatokba kerüljön)!

Megoldás:

Dolgozók eloszlása					
Eloszlás	**Férfi**		**Nő**		**Összesen**
	40 évnél idősebb	*40 éves vagy fiatalabb*	*40 évnél idősebb*	*40 éves vagy fiatalabb*	
Adminisztratív	150	0	0	50	*200*
Fizikai	50	100	110	40	*300*
Részösszeg	*200*	*100*	*110*	*90*	**500**
Összesen	**300**		**200**		

1.6 Gyakorló feladatok

1.1 gyak. feladat:

Az alábbi felsorolásból döntse el, hogy mely sokaság milyen kategóriába sorolható (álló, mozgó, diszkrét, folytonos, véges, végtelen). Egy jellemző akár több kategóriába is besorolható!

- A 2010-es futball vb-n rúgott gólok száma
- A 2012.03.01-én Madagaszkáron született kisoroszlánok száma
- 2009 első negyedévében az USA-ba behozott BMW-k száma
- A Mikulás által vélhetően megtett km-ek száma
- 2010-ben Oroszországban előállított villamos energia mennyisége
- 2012 őszén Kárpátalján felszínre hozott ásványvíz mennyisége
- 2013. április 30-án a beregszászi fagylaltozók száma
- A 2010-es Forma-1 futamokon résztvevő nézők száma
- Hollandia sajttermelése 2009 első félévében
- A Déadai-tóban lévő halak száma 2008-ban
- A Gyűrűk ura c. könyvben igazságtalanul bántalmazott orkok száma
- A csillagok száma
- A cukorrépa lehetséges terméshozama világszerte
- 2009. december 6-án a drogfogyasztók száma Amsterdamban
- 1969. január 1-jén elfogyasztott lencsefőzelék mennyisége Magyarországon
- 2009-ben kiadott magyar nyelvű könyvek száma Kárpátalján
- A kolumbiai drogtermelés mennyisége 2008 nyarán

1.2 gyak. feladat:

Döntsd el az alábbi állításokról, hogy igazak vagy hamisak.

- A statisztikai sokaság mindig mozgó, mert sohasem lehet az adatgyűjtést egyetlen pillanat alatt elvégezni.
- A végtelenül nagy sokaság vizsgálata nem a statisztika tárgya.
- A megfigyelés tárgyát nem feltétlenül alkotja a sokaság mindegyik eleme.
- A mozgó sokaságot időtartamra értelmezzük.

- Statisztikai sokaság a statisztikai megfigyelés tárgyát képező egyedek összessége, halmaza.
- Véges sokaság: számossága pontosan nem előre jelezhető (pl. kísérleti statisztika eredményei, modellezés).
- Végtelen sokaság: nagysága pontosan meghatározható (pl. népesség száma egy adott területen, adott időpontban).

1.3 gyak. feladat:

Az alább felsorolt ismérvek (változók) mennyiségi vagy minőségi ismérvek?

- Egy dvd lemez várható élettartama
- Egy elektromos gitár márkája
- Kiskutyánk életkora
- Egy részvény hozadéka
- Egy rock zenekar turnéja alatt bekövetkezett tömegverekedések száma
- A verekedés hatására kialakult sérülések típusai
- Modellválogatáson a „munkára” megjelentek száma
- Egy western csizma élettartama

1.4 gyak. feladat:

Milyen mérési skálán mérnéd a következő adatokat?

Megnevezés	Az Ön válasza:
Egy teherautó rendszáma	
Agárversenyen a kutyák helyezése	
Banki kamat (%)	
Nemek	
Havi bruttó fizetés	
Év végi osztályzatok	
Hőmérséklet (°C)	
Naptári időszak	
TV műsorok hossza	
Magasság	
Életkor	
Futóversenyen elért helyezések	

1.5 gyak. feladat:

Készítsen az osztályáról:

1. mennyiségi,
2. minőségi
3. területi sort is.

1.6 gyak. feladat:

Az alábbi statisztikai sorban egy lakópark gázfogyasztási adatait láthatjuk.

Gázfogyasztás (m^3)	**Lakások száma**
-40	21
41-80	21
81-	8
Összesen	**50**

Válaszoljon az alábbi kérdésekre:

1. Mi volt a statisztikai sokaság, milyen típusú?
2. Milyen ismérv szerint figyelték meg a sokaságot?
3. Nevezze meg a statisztikai sor típusát!
4. Hogyan keletkezett?
5. Néhány mondatban elemezze ennek a negyedévnek a termelési értékben kifejezett alakulását! (relatív gyakoriság, kumulált értékek, értékösszeg, relatív értékösszeg)

1.7 gyak. feladat:

Egy társasház háztartásainak vízfogyasztására vonatkozó adatok a következők:

12, 15, 24, 10, 30, 26, 18, 34, 25, 17, 7, 40, 29, 25, 25, 12, 19, 33, 37, 31.

Feladat:

a) Az ismérvértékek rangsora alapján készítsen statisztikai sort!

b) Nevezze meg a sor típusát, valamint a sort létrehozó ismérvek fajtáját!

c) Készítsen osztályközös gyakorisági sort, tényleges és becsült értékösszegsort, ill. kumulált gyakorisági és értékösszegsorokat!

II. Egyszerűbb elemzési módszerek

Amint már az előző fejezetben bemutatásra került, a statisztikai számok abszolút és leszármaztatott számokból állnak. Az abszolút számok természetesen fontos információkat takarnak, s társadalmi-gazdasági következtetések, döntések meghozatalára alkalmasak, azonban sokszor vagy túl tágan értelmezik a valóságot, vagy jó viszonylatban értelezzük őket, s ezért a következtetéseink pontatlanok lehetnek. Ezeken kívül még számos oka van annak, hogy az abszolút értékekből további számítások útján eljussunk a leszármaztatott számokhoz.

A jegyzet további részében már csak a leszármaztatott számokkal fogunk foglalkozni, mivel az abszolút számok módszertanilag tovább nem elemezhetőek, s a statisztikai elemzések ezért nem szükségesek.

A leszármaztatott számoknak négy csoportját különböztetjük meg:

1. viszonyszámok,
2. középértékek,
3. szóródási mérőszámok,
4. indexek.

A felsorolásnak megfelelően fogjuk átvenni ezeket a mutatókat, s így kezdjük is az elemzésünket a viszonyszámokkal.

2.1 Viszonyszámok számítása

A statisztikai adatfelvételek eredményeként nyert alapinformációk összesítése, csoportosítása segítségével eljutunk a statisztikai adatokhoz. Ezen primer (elsődleges) adatok összehasonlításával lehetővé tesszük a társadalmi-gazdasági jelenségek közötti összefüggések feltárását.

Igen gyakran alkalmazzuk az ilyen elemzéseinknél a statisztikai adatok közötti viszonylagos nagyság megállapítását, melyet két módon van lehetőségünk megtenni:

- két statisztikai adat különbségének a meghatározásával
- a két adat hányadosának a képzésével.

A különbségek meghatározása alapvető matematikai műveletnek számít, így a továbbiakban a második módszerrel fogunk részletesebben foglalkozni.

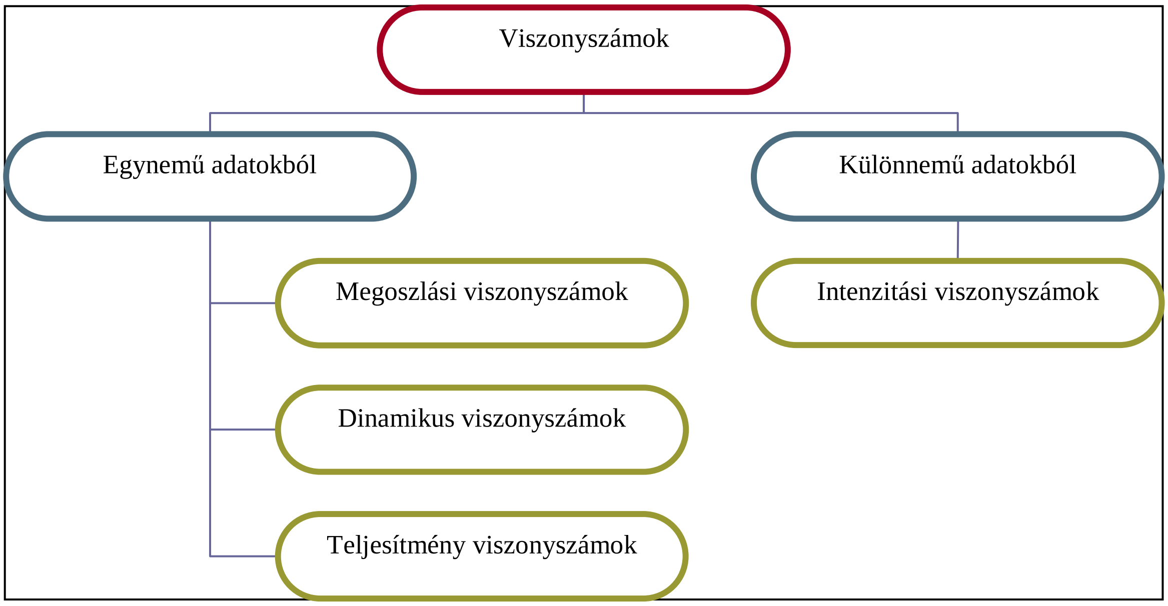
Definíció:
A viszonyszám két egymással valamilyen kapcsolatban lévő statisztikai adat hányadosa.

$$V(Viszonyszám) = \frac{A}{B} = \frac{viszonyított\_adat / viszonyítás\_tárgya}{viszonyítási\_alap / viszonyítás\_bázisa}$$

Az összehasonlításban, az adatok jellege szerint a viszonyszámok két alapvető csoportját különböztetjük meg:

- egynemű adatokból és
- különnemű adatokból számított viszonyszámokat.

A viszonyszámok logikai struktúráját a következő ábra jelzi:



2.1.1 Egynemű adatokból számított viszonyszámok:

Az ebbe a csoportba tartozó viszonyszámok közös jellemzője, hogy az összehasonlított adatok egyneműek, tehát azonos mértékegységűek, s így csak időbeliség, területi vagy egyéb jellemzők alapján térnek el egymástól.
Megjelenési forma lapján ezeket a viszonyszámokat meghatározhatjuk:

- együtthatós formában: pl. X vállalat árbevételének alakulása 2012 III. negyedévében 250 ezer UAH, és IV. negyedévében 300 ezer UAH. Ebből az következik, hogy a két negyedév összehasonlításából (300 : 250) együtthatós formában azt az eredményt kapjuk, hogy a vállalat árbevétele az utolsó negyedévben 1,2-szerese az előző időszakinak;

- százalékos formában: pl. az előző példát folytatva, ha azt szeretnénk kifejezni, hogy hány százalékkal változott az utolsó negyedévben az árbevétel, akkor az 1-től való eltérés (+0,2) százalékos formáját alkalmazva (20 %) tudjuk értelmezni a kérdést. Tehát 20 %-al nőtt a vállalat árbevétele;
- ezrelékes formában: ennek alkalmazása akkor indokolt, ha a viszonyítási adat (A) és a viszonyítási alap (B) közötti eltérés igen jelentős (pl. ha 0,5 ‰-es Kárpátalján az orvos ellátottság, akkor ez azt jelenti, hogy 2000 lakosra egy orvos jut átlagosan).

Megoszlási viszonyszám

Definíció:

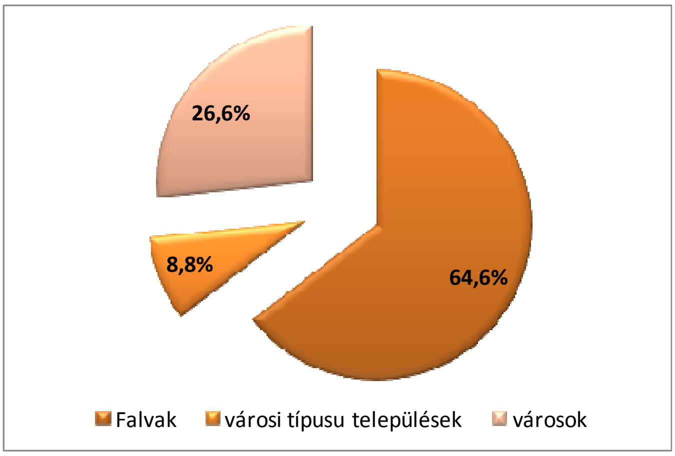
Megoszlási viszonyszám: a sokaság egyes részeinek a sokaság egészéhez viszonyított arányát fejezi ki. Meghatározása úgy történik, hogy a statisztikai sor adatait elosztjuk az összesen adattal. Leggyakrabban minőségi és mennyiségi sorokból számítjuk. A megoszlási viszonyszámok a jelenségek struktúráját jellemzik, a sokaság belső szerkezetét önmagában fejezik ki. Pl.: A hallgatók 60%-a nő.

$$V_m = \frac{X_i}{\sum X_i} \bullet 100\%, vagy: g_i = \frac{f_i}{\sum f_i}$$

A megoszlási viszonyszámra úgy tudunk legkönnyebben ráismerni, hogy mindig a rész/egész hányadossal jellemezhető. A korábbiakban átvett relatív gyakoriság (mint a fenti képlet is mutatja) tipikus formája a megoszlási viszonyszámoknak.

A megoszlási viszonyszámokat rendszerint kördiagram formájában szoktuk ábrázolni. Például a 2001-es népszámlálási adatokból tudjuk, hogy Kárpátalján a vizsgált időpontban a lakosok majd 2/3 arányban falvakban laktak.

A magyar lakosság településtípus szerinti eloszlása Kárpátalján, 2001.



Forrás: *Népszámlálás, 2001.*

Dinamikus viszonyszámok

Definíció:

A **dinamikus viszonyszámok** az időbeli összehasonlításra szolgál, tehát két időszak vagy időpont adatának, mégpedig az összehasonlítás tárgyát képező ***tárgyidőszaknak***, valamint az összehasonlítás alapját képező ***bázisidőszaknak*** a hányadosa.

A dinamikus viszonyszámok együtthatós és százalékos formában is értelmezhetőek. Két formája létezik: bázis - és láncviszonyszámok

Bázisviszonyszámok

Bázisviszonyszám (V_b): állandó bázissal számított dinamikus viszonyszám. Számításánál a tárgyidőszak adatait (y_i) az állandó bázis értékével (y_0) osztjuk el.

$$V_b = \frac{y_i}{y_0}$$

Láncviszonyszámok

Láncviszonyszám (V_l): olyan láncszerűen egymáshoz kapcsolódó dinamikus viszonyszám, melynél minden időszak (pl. év) adatát az őt megelőző időszak adatához viszonyítjuk. Más néven ezt a mutatót változó bázisú viszonyszámoknak is nevezzük.

$$V_l = \frac{y_i}{y_{i-1}}$$

Mintapélda

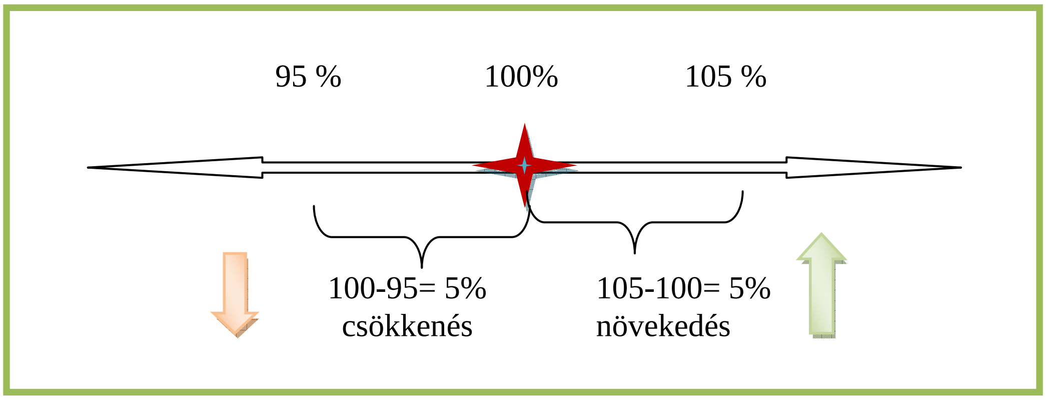
Bereg Bt. vállalat alkalmazottainak száma (2007-2012).

Év	**Alkalmazottak száma (fő)**	**2007=100%**	**Előző év = 100 %**
2007	16	100,0	-
2008	25	**156,3**	156,3
2009	21	131,3	84,0
2010	20	125,0	**95,2**
2011	22	137,5	110,0
2012	24	150,0	109,1

Az alkalmazottak számának alakulását két viszonyszámmal is tudjuk jellemezni. Bázisviszonyszám számítást láthatjuk a táblázat 3. oszlopában.

[156,3] Ez az érték %-ban van kifejezve, ahol a 2008-as év tárgyidőszaki értékét (25 fő) viszonyítottuk a bázisidőszaki év értékéhez (16 fő). Értelmezhető úgy is az adat, hogy 2007-hez képest több mint másfélszerese (1,563) az alkalmazottak száma 2008-ban, vagy pedig 156,3 százaléka; valamint úgy is megfogalmazható a számított adat, hogy a vizsgált időszakban 56,3 %-al nőtt a vállalat alkalmazottainak a száma.

[95,2] Ez az érték azt fejezi ki számunkra, hogy 2010-ben az előző évhez képest az alkalmazottak számában visszaesés tapasztalható: 95,2 %-a a 2009-es évnek, vagy pedig 4,8 %-al (100-95,2) csökkent a vállalkozás munkavállalóinak a száma.



Az ábra azt szemlélteti, hogy viszonyszámok természete szerint a központi kérdésünk az adatok értékelésekor a 100 %-hoz való viszony jelzése:

- amikor az érték pont 100 % = nincs változás,
- amikor az érték nagyobb mint 100 % = növekedés tapasztalható,
- amikor az érték kisebb mint 100 % = csökkenés

Összefüggések a bázis- és láncviszonyszámok között

A legalapvetőbb összefüggés jól szemléltethető az előző minta példa tanulmányozásával. Az alkalmazottak számának alakulását bázis- és láncviszonyszámok segítségével elemeztük. A láncviszonyszámokat a következő arányokkal határoztuk meg:

$$\frac{25}{16}\cdot\frac{21}{25}\cdot\frac{20}{21}\cdot\frac{22}{20}\cdot\frac{24}{22}=\frac{24}{16}=1{,}5\rightarrow 150\%$$

Amennyiben összeszorozzuk a láncviszonyszámok értékét (1,563×0,84×…1,091), akkor ugyan azt az értéket kapjuk, mintha az elosztanánk az első és utolsó elemét a sokaságnak (tehát a példában kiszámoljuk a 2012-es év bázisviszonyszámát). Ennek az összefüggésnek a középértékeknél lesz jelentősége.

Foglaljuk most össze, hogy milyen összefüggései vannak a bázis- és láncviszonyszámoknak:

- a legelső időszakra nem tudunk láncviszonyszámot számítani (pl. 2007, a rekeszbe kötőjellel jelöljük az érték hiányát);
- az állandó bázisul választott időszakban a bázisviszonyszám egyenlő 1-el / 100 %-al;
- az állandó bázisidőszak utáni első tárgyidőszakban a bázis és láncviszonyszámok megegyeznek;
- az állandó bázis után k láncviszonyszám szorzat egyenlő a k-adik bázisviszonyszámmal (a fenti példa definíciója);
- bázisviszonyszámokból úgy számíthatunk láncviszonyszámokat, mint az eredeti abszolút számokból. Ez azt jelenti, hogy az egymást követő két bázisviszonyszám hányadosa megadja a k-adik láncviszonyszámot (2009 és 2008 viszonylatában: 1,313 ÷ 1,563 = 0,84, tehát 84 %, ami a 2009-es év láncviszonyszáma);

- az eredeti abszolút számok ismerete nélkül is átszámíthatjuk a bázisviszonyszámokat új bázisra úgy, mintha a bázisviszonyszámok abszolút számok lennének.

Teljesítmény viszonyszámok

A gazdasági döntéshozatal folyamatában a döntéshozónak állandóan mérlegelnie kell a múltbeli gazdasági teljesítmény, a jelenlegi adatok és a várható, ill. kívánt jövőbeni teljesítmény ismeretében, valamint becslésének megfelelően.

Természetesen a múltbeli és jelen adatokra, mint tényekre hagyatkozhatunk, de a jövőbeli értékeket csak becsülni tudjuk. Sok esetben a realitásoknak megfelelően, de mégis a kívánalmainkat kifejező adatot határozunk meg, amely egy célértéknek mutat fel.

A teljesítmény viszonyszámok feladata, hogy ezeket a célokat mutatószámok segítségével határozza meg, ill. folyamatosan kontrolálja az idő előrehaladásával az teljesítmény teljesülését.

A teljesítmény viszonyszámok között három típus határozunk meg:

Tervfeladat viszonyszám (V_{tf}): valamilyen optimálisnak tartott, norma vagy terv szerinti értéket viszonyítunk a bázisul választott adathoz.

$$V_{tf} = \frac{Terv}{Bázis} = \frac{x_{terv}}{x_0},$$

mely megmutatja, hogy a bázishoz képest hány %-os növekedést irányoztak elő.

Tervteljesítési viszonyszám (V_{tt}): valamilyen ténylegesen elért eredményt ugyanazon jelenség opotmálisnak tartott, norma vagy terv szerinti értékéhez viszonyítunk.

$$V_{tt} = \frac{Tény}{Terv} = \frac{x_1}{x_{terv}}$$

mely megmutatja, hogy milyen %-ban teljesítettük túl, vagy alul a tervet.

Tervszerűségi viszonyszám (V_{tsz}): a mutató tervtől való eltérések abszolút érték határozzam meg a terv viszonylatában.

$$V_{tt} = \frac{Tervszerűeég}{Terv}$$

megmutatja, hogy hány %-ban voltunk tervszerűek.

Értéke 0-100 % között mozoghat.

Mintapélda:

Állattartó Kft teljesítményének alakulása 2011-2012 viszonylatában.

Állatállomány típusa	**Értékesítés árbevétele (UAH)**						
	Tényleges, 2011 (X_0)	**Tervezett, 2012 (X_{terv})**	**Tényleges, 2012 (X_1)**	**V_{tf}, %**	**V_{tt}, %**	**Tervszerűség, UAH**	**V_{tsz}, %**
Szarvasmarha	150000	190000	170000	126,67	89,47	20000	89,47
Sertés	110000	120000	125000	109,09	104,17	5000	95,83
Baromfi	55000	30000	30000	54,55	100,00	0	100,00
Bárány	30000	50000	45000	166,67	90,00	5000	90,00
Összesen:	**345000**	**390000**	**370000**	**113,04**	**94,87**	**30000**	**92,31**

A példában szereplő vállalat négy állatfajta tartásából származó bevételeit elemezzük. Adottak nekünk a 2011-es év árbevétel adatai, valamint a következő évre 2011-ben kalkulált tervadatai. Majd pedig rendelkezésünkre állt a 2012-es tényleges adatok is.

Feladat, hogy megismerjük a vállalat teljesítményét és tervezésének pontosságát. Ezért három mutató kiszámítását kell megejteni, melyeket állat fajtánként és összesen is tudunk értelmezni.

A továbbiakban értelmezzünk egy-egy értéket

V_{tf}=126,67% - a szarvasmarha állomány árbevételében a vállalat 26,67%-os növekedést szeretett volna elérni a következő évben (tehát 150 ezer UAH-ról 190 ezer UAH akarta növelni a szarvasmarhából befolyó bevételét).

V_{tt}=89,47 % – a tervteljesítési mutató azonban jelzi, hogy ezt a tervet nem sikerült teljesíteni, ugyanis közel 10,5 %-os elmaradás tapasztalható a tervértékhez képest (bár a tényleges árbevétel nőtt 20 ezer UAH-val, viszont tervtől szintén 20 ezer hrivnyával tért el).

V_{tf}=113,4% és V_{tt}=94,87 % - azt mutatja, hogy összesen a vállalat 13,4 %-al kívánta bővíteni a következő évben a pénzügyi teljesítményét, viszont ezt a tervet csak 94,87%-ban tudta hozni (tehát közel 5 %-al elmaradt a teljesítménye a várttól).

Tervszerűség. Itt két lépésben tudjuk meghatározni a mutató értékeit. Először abszolút értékben számítjuk ki a 2012-es tényleges és tervezett árbevétel közötti eltérést (20; 5; 0; 5 ezer UAH, tehát összesen 30 ezer hrivnya).

Másodi a százalékos eltérést határozzuk meg egyenként és aggregálva.

Szarvasmarha: $$V_{tsz} = 100\% - \frac{20000 UAH}{190000 UAH} \cdot 100\% = 89{,}47\%$$

Látható, hogy ahol nem volt eltérés (baromfi), a mutató értéke 100%, s minél inkább eltér ez a teljesítmény (pozitív és negatív irányba) a tervtől, annál alacsonyabb százalék mutatkozik.

A vállalat a vizsgált időszakban 92,31 %-ban tudta teljesíteni a tervet.

2.1.2 Különnemű adatokból számított viszonyszámok

Ebbe a kategóriába tartozó viszonyszámokat intenzitási viszonyszámoknak nevezzük.

Definíció:

Intenzitási viszonyszámról beszélünk, amikor két különböző, de egymással logikai kapcsolatban lévő adatot viszonyítunk egymáshoz. Más megközelítésben megmutatja számunkra, hogy az egyik jelenségből átlagosan mennyi jut a másiknak egy egységére, azaz, hogy a vizsgált jelenség milyen intenzitással fordul elő valamilyen más jelenség környezetében.

Típusai:

- sűrűségmutatók, pl. orvosellátottság, népsűrűség
- arányszámok, pl. születési, halálozási
- koordinációs viszonyszámok

Az intenzitási viszonyszámokra általános képlet nem határozható meg, tulajdonképpen egy mértékegységgel ellátott törtről beszélhetünk, melynek variatív lehetőségei igen sokfélék lehetnek.

Viszont tudjuk még tipizálni a viszonyszámokat a következő általános jellemzők alapján:

1. Megfordíthatóság: tehát a két adat viszonyítási helyzetét a vizsgálat céljától függően felcserélhetjük.
    a. megfordítható: pl. Beregszász város 1000 férfira jutó nők aránya (a mutató fordított értelemben is logikus eredményt ad)
    b. nem megfordítható: pl. Ukrajna egy főre jutó GDP nagysága (bár az árnyszám elképzelhető, de mégsem ésszerű a mutató tartalma).

2. Egyenes vagy fordított: ezzel azt mérjük, hogy az intenzitási viszonyszám értékének növekedési pozitív, vagy negatív jelenségre utal.
    a. Egyenes: pozitív jelenség az érték növekedése. Pl. 1 lakosra jutó orvosok száma
    b. Fordított: negatív jelenség az érték növekedése. Pl. 1 orvosra jutó lakosok száma. Ez a mutató egyszerre megfordítható és fordított formájúnak számító intenzitási viszonyszámot takar.

3. Nyers vagy tisztított: ezekben a formákban számíthatóak még ki egyes intenzitási viszonyszámok.
    a. Nyers mutatóról akkor beszélünk, ha a jelenséget vele lazább kapcsolatban álló másik jelenséghez (teljes viszonyítási alaphoz) viszonyítjuk.
    b. Tisztított mutató olyan intenzitási viszonyszámot tükröz, melyben a viszonyítási adathoz vele közvetlenebb kapcsolatban álló jelenséget (kisebb viszonyítási alaphoz) viszonyítjuk.

$V_{\text{int}} = \frac{A}{B} = \frac{A}{b} \cdot \frac{b}{B}$, ahol

b: részhalmaza B-nek, és b szorosabb kapcsolatban van az A-val,

$\frac{A}{B}$: nyers intenzitási viszonyszám,

$\frac{A}{b}$: tisztított intenzitási viszonyszám,

$\frac{b}{B}$: tiszta rész aránya.

Mintapélda:

Egy szarvasmarhatelepen 60 tehenet tartanak. A napi tejtermelés színvonala 600 liter. A vizsgált időszakban fejt tehenek száma 50 db.

Feladat: milyen mértékű az egy tehénre jutó átlagos tejtermelés nyers és tiszta mutatószáma?

Nyers: $Tejtermelés = \frac{600l}{60tehén} = 10l / tehén$

Tisztított: $Tejtermelés = \frac{600l}{50tehén} = 12l / tehén$

Tehát a tehenészeti telepen az összes állományban lévő tehénre számítva a tejtermelés színvonala 10 liter/tehén, míg a fejt tehenekre számított arány 12 liter/tehén. A tiszta rész aránya pedig 83,3 % (50/60).

A nyersből úgy tudunk tisztított mutatót számítani (amennyiben nem áll rendelkezésünkre a tiszta és nyers rész száma, csak annak aránya), hogy a nyers mutató értékét osztjuk a tiszta rész arányával:

$$Tejtermelés_{tisztított} = \frac{10l / tehén}{0,8333} = 12l / tehén$$

2.1.3 Mintafeladatok

2.1.1 mintafeladat:

1993-ban szénből 12 593 ezer tonnát, kőolajból 1 709 ezer tonnát, bauxitból 1 561 ezer tonnát, nyersacélból 1 753 ezer tonnát termeltünk.

- Számítsa ki ezen kategóriák arányait!
- Nevezze meg a kiszámított viszonyszámot!

Nyersanyagtermelés megoszlása		
Megnevezés	**Termelés (ezer tonna)**	**Megoszlás**
Szén	12 593	71,486%
Kőolaj	1 709	9,701%
Bauxit	1 561	8,861%
Nyersacél	1 753	9,951%
Összesen	**17 616**	**100%**

Megoszlási viszonyszám

2.1.2 mintafeladat:

A következő adatokat ismerjük:

Év	**Koncertek száma**	**A koncertekenrésztvevők száma (ezer fő)**
1995	199	91
1996	204	86
1997	173	74
1998	147	59
1999	116	58
2000	126	62
2001	141	78

Feladat:

Határozza meg az összes bázis és lánc alapon számított viszonyszámokat, ezzel is segítve egy újabb koncertturné megszervezését és a várható nézőszám prognosztizálását!

Év	Koncertek száma	A koncerteken résztvevők száma (ezer fő)	Bázis viszonyszám	Lánc viszonyszám
1995	199	91	100,00%	-
1996	204	86	102,51%	102,51%
1997	173	74	86,93%	84,80%
1998	147	59	73,87%	84,97%
1999	116	58	58,29%	78,91%
2000	126	62	63,32%	108,62%
2001	141	78	70,85%	111,90%

Adatok értelmezése:

- Látható, hogy a 90-es években a koncertek alakulásánál folyamatos csökkenés volt tapasztalható ’99-ig, majd az utolsó két évben az előző évekhez képest lassú növekedés (2000-ben közel 9 %-os, és 2001-ben közel 12 %-os növekedés), viszont így is jelentősen alul marad 1995-höz képest (kb. 30%-os visszaesés).
- Az adatok alapján arra lehet következtetni, hogy 2000-től trendfordulás következett be, s várhatóan az azt követő években növekvő részvételi szám irányozható elő.

2.1.3 mintafeladat:

Egy kárpátaljai vendéglátó vállalat forgalmát jellemző adatok 2007-ben.

Hónapok	Forgalom			Változás az előző hónaphoz	
	Hr	Jún=100%	Előző hó=100%	Hr	%-ban
Jún					
Júl					-5
Aug				+50	
Szept		110			
Okt				+100	
Nov					+10
Dec				+300	+4

Feladat: *Számítsa ki a hiányzó adatokat!*

Megoldás:

Ennél a feladattípusnál a viszonyszámok természete és a közöttük lévő összefüggés ismerete szükséges.

Általában idősorok lánc- és bázisviszonyszámait határozzuk meg, de most fordított sorrendben. Részleges ismeretink vannak a viszonyszámok tekintetében, melyből következtetni kall a nem ismert bevételi adatokra (Forgalaom, Hr).

Mindig azt kell megvizsgálni, hogy adott sorban hol találunk legtöbb információt, amit feltudunk használni a forgalom aktuális hónapban való nagyságának kiszámítására.

Egyetlen hónapban, decemberben látható, hogy két információnk is van: novemberhez képest az árbevétel 300 hr-val nőtt, ami 4 %-os növekményt jelent. Az előző hónapi bázis értéket úgy tudjuk meghatározni, hogy a 300-at elosztjuk 0,04-el, ami 7500 hrivnyát eredményez. Így megkapjuk a két utolsó hónap forgalmi értékét (7500 és 7800 UAH).

Hónapok	**Forgalom**			**Változás az előző hónaphoz**	
	Hr	**Jún=100%**	**Előző hó=100%**	**Hr**	**%-ban**
Jún	6107,5	100	-	-	-
Júl	5802,1	95,0	95,0	-305,4	-5
Aug	5852,1	95,8	100,9	50	0,9
Szept	6718,2	110,0	114,8	866,1	14,8
Okt	6818,2	111,6	101,5	100	1,5
Nov	7500	122,8	110,0	681,8	10,0
Dec	7800	127,7	104,0	300	4,0

Tudjuk, hogy a novemberi forgalom 10 %-al nagyobb, mint az előző havi. Ebből következik, hogy októberben 6818,2 hr volt az árbevétel (7500/1,1). Októberi információ, hogy az előző hónaphoz képest ekkor 100 hr-val nagyobb árbevétel keletkezett (6818,2-100= 6718,2). Ez az érték 110 %-a júniusi bázis hónapnak, így a június árbevétel 6 107,5 hr.

Tudjuk, továbbá, hogy júliusban az árbevétel 5 %-al csökkent az előző havihoz képest, így a valós érték 5 802,1 hr (6107,5×0,95). Az augusztusi árbevétel pedig 50 hr-el növekedett, így értéke 5 852,1 UAH.

A hiányzó bázis és láncviszonyszámokat a korábbiakban bemutatottak szerint kell meghatározni és így kitölteni minden egyes táblázati rekeszt.

2.1.4 mintafeladat:

Egy vállalatról a következő információk állnak rendelkezésünkre.

Megnevezés	Érték
Foglalkoztatottak szám (fő)	25
Szellemi foglalkoztatottak (fő)	6
Teljesítmény (óra)	250
Bérmennyiség (UAH)	70000

Feladat:

Határozza meg:

- az egy főre jutó teljesítmény nyers és tisztított mutatószámát;
- a létszámigényesség nyers és tisztított mutatószámát,
- az átlagos bér nagyságát!

Egy főre jutó teljesítmény (nyers) = $\dfrac{teljesítmény}{foglalkoztatottak} = \dfrac{250 óra}{25\,fő} = 10\,óra\,/\,fő$

A nyers mutató esetében a vállalatnál dolgozó összes alkalmazottat számításba vesszük. Ehhez képest pontosabb megközelítést ad jelen esetben a tisztított mutató.

Egy főre jutó teljesítmény (tisztított) = $\dfrac{teljesítmény}{foglalkoztatottak(fizikai)} = \dfrac{250 óra}{(25-6)\,fő} \approx 13\,óra\,/\,fő$

A létszámigényességet úgy határozzuk meg, hogy az előző mutató reciprokát számítjuk ki:

Létszámigényesség (nyers): $\dfrac{foglalkoztatottak}{teljesítmény} = \dfrac{25\,fő}{250 óra} = 0{,}1\,fő\,/\,óra$

Mivel a mutató nagysága csökkenő teljesítményre utal, ezért ezt a mutatót fordított intenzitási viszonyszámnak nevezzük.

Létszámigényesség (nyers): $\dfrac{foglalkoztatottak(fizikai)}{teljesítmény} = \dfrac{19\,fő}{250 óra} = 0{,}076\,fő\,/\,óra$

2.1.5 mintafeladat:

Egy nőnap alkalmából megrendezett koncerten a Budapest a Sportcsarnokban 34200 néző volt. A nőnapra való tekintettel a hölgyek ingyenesen látogathatták a rendezvényt. Tudjuk továbbá, hogy a koncert szervezői 26 750 jegyet adtak el.

a. Mennyi volt a nők aránya a stadionban?
b. Mennyi az egy nőre jutó férfiak aránya a koncerten?

Megoldás:

Nézők	
Nők	7 450
Férfiak	26 750
Összesen	**34 200**

a) A nők aránya a stadionban: $\frac{7450}{34200} = 0{,}218 = 21{,}8\%$

b) Az egy nőre jutó férfiak aránya a koncerten: $\frac{26750}{7450} = 3{,}59$ fő

2.1.6 mintafeladat:

Egy vállalkozás adatait láthatjuk az alábbi táblázatban. Számítsuk ki a termelékenység változását!

Megnevezés	**2009**	**2010**
Termelés (ezer db)	900	985
Létszám (fő)	245	216

Megoldás:

Megnevezés	**2009**	**2010**	**Változás (%) Vd**
Termelés (ezer db)	900	980	980/900 = 1,0944
Létszám (fő)	245	216	216/245 = 0,8816
Termelékenység(ezer db/fő)	900/245 =3,673	980/216 =4,537	4,537/3,673=1,235 vagy 1, 0944/0,8816=1,241

A termelés változása 9,44%-os növekedést mutat, míg 2010-ben az előző évhez képest a foglalkoztatottak száma 88,16 %-ra csökkent (kb. 12 %-os leépítés).

Mivel a termelés nőtt a foglalkoztatottak száma pedig csökkent, így következtetni tudunk, hogy a termelékenység pozitív változáson ment keresztül.

Két módon tudjuk ezt kiszámolni:

a) a két év termelékenységének a hányadosával: 4,537/3,673=1,235, tehát 23,5 %-al nőtt a vállalat termelékenysége.

b) termelés és a létszám esetében számított együtthatós változók hányadosával: 1, 0944/0,8816=1,241; tehát 24,1 %-al nőtt termelékenység.

Miért tér el egymástól a két adat?

A számítás ugyan azt az eredményt adja, viszont a kerekítések miatt jelentkezik ez a kis számú eltérés.

Gyakorló feladatok:

2.1.1 gyak. feladatok:

Egy középvállalkozás forgalmát jellemző adatok 2009-ben:

Hónapok	Forgalom			Változás az előző hónaphoz	
	ezer Hr	Jún=100%	Előző hó=100%	ezer Hr	%-ban
Jan					
Feb					-5
Már				+50	
Ápr		120			
Máj				+200	
Jún				+500	
Júl					

A júliusi forgalom 4 %-kal, a júniusi pedig 1,1-szer haladja meg az előző havi bevételt.

Feladat: *Számítsa ki a hiányzó adatokat!*

2.1.2 gyak. feladatok:

Egy vállalat forgalmának alakulását a következő viszonyszámok jellemzik:

Az áprilisi forgalom januári bázison 120%, a júniusi forgalom az áprilisinak 110%-a, az augusztusi forgalom 15%-kal több, mint az áprilisi. Augusztusról szeptemberre 2%-kal, októberre pedig 7%-kal csökkent a forgalom. A decemberi forgalom 1,15-szöröse az októberinek.

Feladat:

a) Hogyan változott a vállalat forgalma januárról szeptemberre?
b) Táblázatba rendezve írja fel a láncviszonyszámokat!

2.1.3 gyak. feladat:

Kárpát Kft 15 %-os árbevétel növekedést tervezett 2012-re, ténylegesen azonban csak 8 százalékos emelkedést ért el 2011-hez képest. Így eredménye 80 ezer UAH lett.

Feladat:

a) Mennyi volt az árbevétele 2011-ben?
b) Mennyi eredményt tervezett 2012-re?

2.1.4 gyak. feladatok:

Egy jelentős mezőgazdasági vállalkozásnál 2010-ben az egy foglalkoztatottra jutó termelés 63 tonna/fő volt. A dolgozók 82 %-a fizikai alkalmazott volt.

Feladat: számítsa ki az egy fizikai alkalmazottra jut termelést!

2.1.5 gyak. feladatok:

Egy főiskolán a hallgatói és oktatói arány 25 fő. Az intézmény dolgozóin belül az oktatók aránya 60 %.

Feladat: Állapítsa meg az egy dolgozóra jutó hallgatói átlaglétszámot!

2.1.6 gyak. feladatok:

Adott időpontban a Beregszászi Járási Kórházban 25 orvos praktizált. A kórház vonzáskörzetéhez összesen 65 000 lakos tartozott.

Feladat: Számítsa ki az orvosellátottság egyenes és fordított mutatóját!

2.1.7 gyak. feladatok:

Bereg Kft. vállalatnál a diplomások 60 %, a dolgozóknak pedig 45 %-a férfi. Ismert továbbá az, hogy a dolgozók 65 %-a diplomás.

Feladat: Határozza meg, hogy a dolgozók hány százaléka diplomás?

2.1.8 gyak. feladatok:

Egy kárpátaljai kesztyűgyár 2009-es termelési és értékesítési árbevétele 266 ezer UAH. A vállalat 2010-re kitűzött értékesítési célszáma 300 ezer UAH. A valóságban 2010-ben a tényeges árbevétel elérte a 295 ezer hrivnyát.

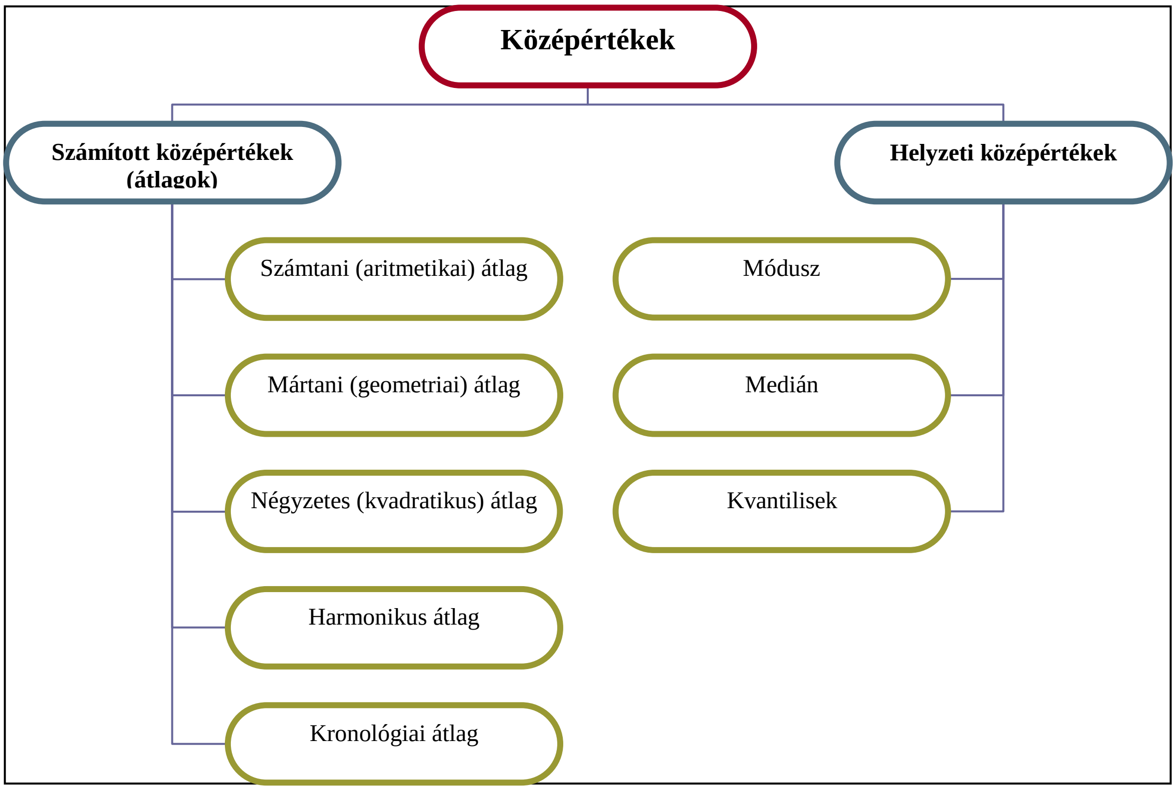
Feladat: Határozza meg a kesztyűgyár tervfeladat, tervteljesítési és tervszerűségi viszonyszámait!

2.2 Átlagok és középértékek

Átlagokról és középértékekről mindenki hallott már. Az egyszerűbb módszereket mindenki ismeri és gyakran alkalmazza is. Viszont nem vagyunk tisztában egyrészt a középértékek alkalmazásának a céljával és vagy nem ismerjük a számtani átlagon kívül más módszertani formulákat, vagy nem helyesen alkalmazzuk ezeket.
Ennek a fejezetnek a célja, hogy megismerjük rendszerezettben a középértékek fajtáit, értsük ezek gazdasági életben betöltött szerepét, s tudjuk megkülönböztetni a használati módszereket a középértékek alkalmazásakor.
Defíníció:
Azonos fajta adatok tömegének közös jellemzői a középértékek, melyek egyetlen adatba tömörítik a sokaság vizsgálat szempontjából lényeges tulajdonságait.
A középértékeket két fő kategóriára bontjuk:

- Helyzeti középértékekről beszélünk akkor, amikor az elemek értéknagyság szerinti sorából:
  a) matematikai számítás nélkül jelöljük ki,
  b) a kijelölés az adatok sorszámához vagy a gyakorisághoz kötődik.
- Számított középértekről beszélünk akkor, amikor a keresett érték:
  a) matematikai számítás eredménye,
  b) az értéksor elemeivel matematikai összefüggést alkot,
  c) az elemek értéknagyságának a centrumában van.

A középértékek rendszerét a következő ábra szemlélteti:



2.2.1 Számított középértékek

Amikor átlagról beszélünk az mindig számított középérték. Ez a formula a legtöbbet használt, s legjobb közelítési módszer. Bár sok esetben nem alkalmazható, vagy ha alkalmazzák, azt helytelenül teszik (a későbbiekben bemutatom ezeket az eseteket is).

Számtani áltag ($\overline{X_a}$) – aritmetikai átlag

Definíció:

Olyan számított középérték, amelyet az átlagolandó értékek helyébe írva, azok összege változatlan marad.

Alkalmazható: akkor, amikor az átlagolandó elemek összegének van valamilyen tárgyi értelme.

A számtani átlagnak két formulája van (mint a legtöbb átlagnak is):

- egyszerű számtani átlag: ha minden elem (x_i) csak egyszer fordul elő
- súlyozott számtani átlag: ha az adatok előfordulása (f_i) különböző.

Egyszerű számtani átlag: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$, ahol x_i a sokaság (minta) i-edik eleme,

n: a sokaság (minta elemszáma

Súlyozott számtani áltag:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \sum_{i=1}^{k} g_i \cdot x_i$$, ahol f_i a gyakoriság és g_i a relatív gyakoriság

A súlyozott számtani áltagot az abszolút értékű gyakoriságokkal, valamint a relatív gyakoriságokkal is ki tudjuk számítani.

Súlyozott számtani átlag osztályközös gyakorisági sorból:

$$\bar{x}_a = a + \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot d_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} \cdot i,$$ ahol

a: a kiválasztott osztály közepe,

d_i: segédszámítás, amit a következőképen határozunk meg: $d_i = \frac{u_i - a}{i}$, ahol u_i az adott sor osztályközepe, „a” pedig a kiválasztott osztály közepe, „i” pedig az osztályköz terjedelme.

A számtani átlag tulajdonságai:

1. Minden egyes x_i érték helyébe az átlagot írva, az értékösszeg nem változik.
2. Az átlag mindig a legkisebb és legnagyobb érték közé esik.
3. Ha az átlagolandó értékek mindegyikéhez ugyanazt a d konstans számot hozzáadjuk, akkor az átlag is d-vel nő meg.
4. Ha az átlagolandó értékek mindegyikét ugyanazzal a konstans számmal (k) megszorozzuk, akkor az átlag is k-szorosára változik.

Mintapélda:

Egy nagykereskedelmi egység a hétvégi vásárlások értékének megoszlását vizsgálta és a következő táblázatnak megfelelőn rendezte az adatokat:

Fogyasztás (UAH)	Vásárlás (db)
-40,00	13
40,01-45,00	27
45,01-50,00	41
50,01-55,00	49
55,01-60,00	16
60,01-	4
Összesen:	**150**

Feladat: Elemezze a fenti táblázat alapján a fogyasztást középértékekkel!

Megoldás:

Mivel a vizsgált minta osztályközös gyakorisági sorba van rendezve, így az átlagot az osztályközös gyakorisági sorból számított számtani átlag formulával határozzuk meg.

Fogyasztás (UAH)	Vásárlás (db)	Segéd-számítások	
X_i	f_i	d_i	$f_i d_i$
-40	13	-3	-39
40,01-45,00	27	-2	-54
45,01-50,00	41	-1	-41
50,01-55,00	49	0	0
55,01-60,00	16	1	16
60,01-	4	2	8
Összesen:	**150**	**-**	**-110**

A d_i értékát a fenti képlet segítségével is kiszámíthatjuk, viszont egyenlő szélességű osztályközök esetén (mint ebben a példában is), használhatunk egy egyszerűbb módszert:

- válasszunk ki egy tetszőleges sort (lehetőleg valamelyik középső osztályközt, ahol a gyakoriság is nagy), s tegyünk ide 0-t.
- majd skálázzuk be a többi értéket egész számokkal úgy, hogy felfelé a negatív értékek, s a nullától lefelé pedig a pozitív értékek következzenek.

Ezt követően összegezzük az $f_i d_i$ szorzat eredményeit (-110). Az „a” értéke jelen példában 52,5, ugyanis a kiválasztott osztály közepe ennyinek felel meg.

$$\bar{x}_a = 52{,}5 + \frac{-110}{150} \cdot 5 = 48{,}83 \text{ UAH}$$

Mértani átlag ($\overline{X_g}$) – geometriai átlag

Definíció:

Olyan számított középérték, amelyet az átlagolandó értékek helyébe írva, azok szorzata változatlan marad.

Akkor használj, amikor idősorok elemzésénél a láncviszonyszámok alapján változás átlagos ütemét akarjuk meghatározni.

Egyszerű geometriai átlag: az adatok szorzatának (π) n-edik gyöke:

$$\bar{x}_g = \sqrt[n-1]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$

Súlyozott geometriai átlag: az átlagolandó értékek előfordulásainak megfelelő hatványaiból képzett szorzat súlyösszegeinek megfelelő gyöke:

$$\bar{x}_g = \sqrt[\sum f_i]{\prod_{i=1}^{k} x_i^{fi}}$$

A mértani átlagot idősorok adatainak átlagolására használjuk, amikor az időbeni változás átlagos ütemét akarjuk meghatározni.

Mintapélda:

Egy kárpátalja közepes vállalat vagyonáról készült kimutatás szerint a következő képen gyarapodott cég:

Évek	Vagyon (UAH)	V_l (együtthatós)
2008	510000	-
2009	550000	1,078
2010	720000	1,309
2011	790000	1,097
2012	810000	1,025

A táblázat tartalmaz egy számított értéket, melynek módszerét az előző fejezetben (viszonyszámok) tárgyaltuk. Meghatározzuk tehát (jelen példában együtthatós formában) az egyes évek láncviszonyszámait. Ezeket az értékeket használjuk fel a geometriai átlagnál.

$\bar{x}_g = \sqrt[4]{1{,}078 \cdot 1{,}309 \cdot 1{,}097 \cdot 1{,}025} = 1{,}12$

Következtetés: a vállalatnál 2008 és 2012 között évente 12 %-os vagyonnövekedés következett be.

A viszonyszámok összefüggései alapján a geometriai átlagot egy másik formulával is meg tudjuk határozni:

$\overline{X}_g = \sqrt[n-1]{\frac{x_i}{x_0}} = \sqrt[4]{\frac{810000}{510000}} = 1{,}12$, tehát az abszolút értékek utolsó adatát osztva a bázis (első) értékkel n-1-edig gyököt vonva belőle szintén megkapjuk a mértani átlag értékét.

Négyzetes átlag ($\overline{X_q}$)

Definíció:

Olyan számított középérték, amelyet az átlagolandó értékek helyébe írva, azok négyzetösszege változatlan marad.

Egyszerű négyzetes átlag: az átlagolandó adatok négyzetösszegének és az adatok számának hányadosából számított négyzetgyökök érték:

Egyszerű formula: $\bar{x}_q = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}$, mely az egyszerű formájú szórásnak felel meg (következő fejezetben lesz tárgyalva.

Súlyozott formula: $\bar{x}_q = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} f_i \cdot x_i^2}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} g_i \cdot x_i^2}{\sum_{i=1}^{k} g_i}$ (súlyozott szórás képlete).

Akkor használjuk, amikor az átlagolandó értékek között pozitív és negatív számok egyaránt vannak, de a vizsgálati cél szempontjából az előjelnek nincs jelentősége.

Hormonikus átlag ($\overline{X_h}$)

Definíció:

Olyan számított középérték, amelyet az átlagolandó értékek helyébe írva, azok reciprokösszege változatlan marad.

Alkalmazása: amikor a reciprok értékek összegének van értelme. Egyik fontos felhasználási mód az, amikor számtani átlagot kellene számolnunk, de a tényleges gyakoriságok nem, csak az értékösszegek ismertek (vagy azok arányai).

Továbbá használjuk az intenzitási viszonyszámok átlagolására is.

Egyszerű harmonikus átlag: az adatok számának (n) és értékeik reciprokösszegének a hányadosa.

$$\bar{x}_h = \frac{n}{\sum \frac{1}{x_i}}$$

Súlyozott harmonikus átlag: a súlyok összegének és az átlagolandó adatok reciprokjai súlyokkal képzett szorzatösszegének a hányadosa:

$$\bar{x}_h = \frac{n}{\sum \frac{f_i}{x_i}}$$

Mintapélda:

Egy vállalat négy termelősoron dolgozik. A termelősorok az alábbi teljesítményt produkálták a vizsgált időszakban.

A sor: 0,5 óra/db

B sor: 0,35 óra/db

C sor: 0,42 óra/ db

D sor: 0,28 óra/ db

Feladat: Határozza meg az átlagos teljesítményt a teljes gyárra nézve!

$$\bar{x}_h = \frac{4}{\frac{1}{0{,}5} + \frac{1}{0{,}35} + \frac{1}{0{,}42} + \frac{1}{0{,}28}}$$ =0,37 óra/db.

A vállalat átlagos teljesítménye egy darabot 0,37 óra alatt gyárt le, azaz 2,7 darabot gyárt le egy óra leforgása alatt.

Számított középértékek összefüggései

Bár még nem néztük át a kronologikus átlagot, viszont az előzőleg átnézett négy átlagtípus szoros összefüggésben áll egymással, valamint az értékei között sorrend állítható fel. Ennek megfelelően az alábbi összefüggés ismert ezekre az átlagokra:

$$\overline{X}_h < \overline{X}_g < \overline{X}_a < \overline{X}_q$$

2.2.2 Idősorok elemzése átlagokkal

Idősorok tekintetében megkülönböztetünk állapot- és tartamidősorokat. Az utóbbi estében egy intervallum értékét kapjuk meg adatként, míg az első esetben egy un. stock jellegű, állapotot kifejező értéket elemzünk. Ennek megfelelően két módszerrel tudjuk elemezni az idősorokat:

- tartamidősor esetén: a már ismert egyszerű számtani átlagot használjuk.
- állapot idősor esetén: ebben az esetben kell alkalmaznunk a kronologikus átlagot.

Kronologikus átlag

Definíció:

A kronologikus átlag a számtani átlag egy speciális változata, mely egy kétszeres számtani átlag forma.

Számítása: az első és utolsó adat felének, valamint a közbenső értékek összegének az értékét osztjuk az adatok egy számértékkel kisebb értékével.

$$\overline{X_k = \frac{\frac{x_1 + x_i}{2} + \sum_{i=2}^{n-1} x_i}{n-1}}$$

Mintapélda:

A vállalat vagyonmérlege 2011-ben a következő értéket mutatta:

Időszak	Vagyonérték (ezer UAH)
I. negyedév	450
II. negyedév	420
III. negyedév	460
IV. negyedév	470

Feladat: Mekkora az éves átlagos vagyonérték a vállalatnál?

Megoldás:

$$\overline{X_k = \frac{\frac{450+470}{2} + 420 + 460}{3}}$$ =455 ezer UAH.

2.2.3 Helyzeti középértékek számítása

Az átlagok az elemek értéknagyságának cetnrumát fejezik ki, de az átlaggal azonos értékű adat gyakran nem is található a statisztikai sokaságban. A gyakorlati életben ezért nem mindig az átlag a megfelelő forma az adatok jellemzésére, hanem helyette célszerű a statisztikai sor valamely tényleges elemét választani. Alapja az adatok sorba rendezése, amely alapján tudjuk a megfelelő helyzeti középértéket (pl. medián, modusz) hasznáni.
A helyzeti középértékek meghatározása tehát kijelöléssel történik, de eltérő képen használjuk egyszerű és súlyozott formában.

Tehát a helyzeti középrtékek a következő képen csoportosíthatóak:

- Medián (M_e):
  - Egyszerű: a rangsorba rendezett adatok közül a középső elemet mediánnak nevezzük. A medián tehát az az érték, amitől az adatok fele kisebb, másik fele pedig nagyobb értéket vesz fel.
    Megkülönböztetjük a tagszámok estének függvényében:
    - Páratlan tagszám estén a középső adat
    - Páros tagszám estén a két középső adat egyszerű számtani átlaga

<u>Mintapélda:</u>

„A” vállalatnál 9 alkalmazott átlagkeresetét ismerjük, míg „B” vállaltnál dolgozók szám 6 fő.

Feladat: Az adatok alapján határozzuk meg a két vállalat dolgozóinak medián keresetét!

"A" vállalat		"B" vállalat	
Sorszám	**Bér (UAH)**	**Sorszám**	**Bér (UAH)**
1	950	1	1300
2	1100	2	1700
3	1100	3	1750
4	1250	4	1900
5	1500	5	2500
6	1600	6	4300
7	1750		
8	1800		
9	2500		

Megoldás:

Az adatokat első körben sorba rendeztük. Az „A” vállalatnál a középső érték (1+9)/2=5, azaz 1500 UAH. Ettől a bértől a dolgozók egyik fele többet, másik fele pedig kevesebbet keres.

A „B” vállalatnál kicsit másként kell meghatározni, mivel nincs középső sor, s így érték. Ilyenkor a két középső értéket vesszük (1750 és 1900), s ennek az egyszerű számtani átlagát határozzuk meg: $M_e = \frac{1750+1900}{2} =$ 1825 UAH. Az értékelése megegyezik az előzőjével.

- Osztály közös (egyenlő szélességű) gyakorisági sorból medián számítása:
  - Meghatározzuk a medián sorszámát: $Sm_e = \frac{n}{2}$
  - Megkeressük azt az osztályközt, amelyben az n/2 sorszámú adat található. Ezt nevezzük mediánt tartalmazó osztálynak (r-edik).
  - Az osztályköz alsó értékéhez (X_{r0}) hozzáadjuk az osztályköz arányos terjedelmét, amely a sorszám és a mediánt megelőző osztály kumulált gyakoriságának a különbsége, osztva a mediánt tartalmazó osztály gyakoriságával (f_r), s szorozva az osztály szélességgel (i).

$$M_e = x_{r0} + \frac{S_{Me} - \sum f'_{i-1}}{f_r} \cdot i$$

Mintapélda: (folytatva a számtani átlagnál elkezdett példát)

Egy nagykereskedelmi egység a hétvégi vásárlások értékének megoszlását vizsgálta és a következő táblázatnak megfelelőn rendezte az adatokat:

Fogyasztás (UAH)	**Vásárlás (db)**
-40,00	13
40,01-45,00	27
45,01-50,00	41
50,01-55,00	49
55,01-60,00	16
60,01-	4
Összesen:	**150**

Feladat: Határozza meg a fogyasztás mediánját!

Megoldás:

A táblázatban meg kell határoznunk a kumulált gyakorisági értékeket.

Fogyasztás (UAH)	Vásárlás (db), f_i	f_i'
-40	13	13
40,01-45,00	27	40
45,01-50,00	41	81
50,01-55,00	49	130
55,01-60,00	16	146
60,01-	4	150
Összesen:	**150**	**-**

Kijelöljük a medián sorszámát: $Sm_e = \frac{150}{2}$ =75, majd megkeressük azt a kumulált gyakorisági értéket (f_i'), amelynek az értéke éppen meghaladja a medián sorszámát. Ez a 81, s így a 45 és 50 közé eső fogyasztás sorát válasszuk ki. Az x_{r0} érték a kiválasztott sor alsó határát jelzi.

Majd behelyettesítjük az adatokat: $M_e = 45 + \frac{75-40}{41} \cdot 5$ =49,27 UAH.

Következtetés: A fogyasztók egyik fele 49,27 hrivnya alatti értékekben vásárolt, míg másik fel ettől többet költött vásárlásai alkalmával.

- Modusz (M_0): a leggyakrabban előforduló elemet jelenti.
    - Egyszerű: egy diszkrét statisztikai sor leggyakrabban előforduló egysége

Mintapélda:

A főiskolán a lányok hajszínének a vizsgálata során az alábbi értékeket kaptuk:

Hajszín	Gyakoriság (fő)
Fekete	45
Barna	350
Szőke	34
Egyéb	6

Megoldás: A hajszín módusza a barna sorban 350 fő.

- Osztályközös gyakorisági sorból:
  - A leggyakoribb osztályt modális osztálynak nevezzük (r-edik).
  - A modális osztályon belül keressük a konkrét módusz értéket.
  - Számítása: az osztályköz alsó értékéhez hozzáadjuk az arányos terjedelmet.

$$M_o = x_{r0} + \frac{f_r - f_{r-1}}{(f_r - f_{r-1}) + (f_r - f_{r+1})} \cdot i$$

Mintapélda:

Folytatva a mediánnál használt osztályközös gyakorisági sort, most meghatározzuk a fogyasztás móduszát:

A modális sor az 50 és 55 hrivnya közé eső fogyasztás (49 fő). Ezt a sort válasszuk ki.

Számítás: $M_o = 50 + \frac{49-41}{(49-41)+(49-16)} \cdot 5 \approx 51$ UAH.

Tehát a leggyakrabban vásárolt érték 51 UAH.

- Kvartilisek (Q_1 és Q_3): negyedelő értékek
  - Alsó kvartilis (Q_1): sorszáma $S_{Q_e} = \frac{n}{4}$

$$Q_1 = x_{r0} + \frac{S_{Q1} - \sum f'_{i-1}}{f_r} \cdot i$$

  - Középső (Q_2): egyenlő a mediánnal, sorszáma $Sm_e = \frac{n}{2}$
  - Felső kvartilis (Q_3): sorszáma $S_{Q_e} = \frac{3n}{4}$

$$Q_3 = x_{r0} + \frac{S_{Q3} - \sum f'_{i-1}}{f_r} \cdot i$$

Mintapélda:

Folytatjuk a megkezdett feladatot a fogyasztási gyakoriságról.

- Alsó kvartilis számítása: S_{Q1}=150/4=37,5 – az alsó kvartilis sorszáma.
  37,5-es értéktől a táblázatban 40-es kumulált érték a nagyobb, így kiválasztjuk a 40-45 közé eső osztályközt.

$$Q_1 = 40 + \frac{37,5 - 13}{41} \cdot 5 = 44,5 \text{ UAH.}$$

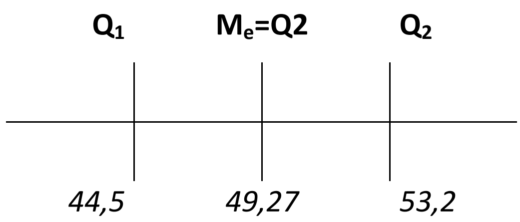
Az érték azt jelenti, hogy a vásárolók ¼-e kevesebbet költött, mint 44,5 UAH és ¾-e pedig többet.

- Felső kvartilis számítása: S_{Q3}=3×150/4=112,5 – a felső kvartilis sorszáma

  112,5-es értéktől a táblázatban épp nagyobb 130-as kumulált érték (f'), amely kijelöli számunkra az 50 és 55 közé eső fogyasztási osztályt.

$$Q_3 = 50 + \frac{112,5 - 81}{49} \cdot 5 = 53,2 \text{ UAH.}$$

Az érték azt jelenti, hogy a vásárolók ¼-e kevesebbet költ, mint 53,2 UAH és ¾-e pedig többet.



2.2.4 Mintafeladatok

2.1.7 mintafeladat:

Egy bank vidéki fiókjában azt vizsgálták, hogy a lakossági betétesek egy naptári évben hányszor fordultak meg a betétjükkel kapcsolatos ügyben az adott vidéki fiókban. Ezt a következő táblázat foglalja össze:

Előfordulások száma	Betétesek száma (fő)
-5	8
5-10	26
10-15	50
15-20	256
20-25	147
25-30	56
30-35	45
35-	12
Összesen:	**600**

Feladat: Elemezze a fenti táblázat alapján a betéttulajdonosok magatartását középértékekkel!

Megoldás:

Az adatok osztályközös gyakorisági sorban áll rendelkezésünkre. Ezt figyelembe véve kell megválasztanunk az értékelési módszertant. Mivel a feladat általánosan fogalmaz, ezért minden lehetséges középérték formát, ami értelmezhető erre az adatsorra, meg kell, hogy határozzuk.

Ki kell számolni: az átlagot (X_a), mediánt (M_e) és a moduszt (M_o).

Segédtábla:

Előfordulások száma	Betétesek száma (fő)	Segédszámítások		
Xi	**fi**	**di**	**fidi**	**fi'**
-5	8	-3	-24	8
5-10	26	-2	-52	34
10-15	50	-1	-50	84
15-20	256	0	0	340
20-25	147	1	147	487
25-30	56	2	112	543
30-35	45	3	135	588
35-	12	4	48	600
Összesen:	**600**	**-**	**316**	**-**

Számtani átlag osztályközös gyakorisági sorból:

$\bar{x}_a = 17{,}5 + \frac{316}{600} \cdot 5 = 20{,}13$ – átlagosan az ügyfelek évente 20-szor fordultak meg a vizsgált bankfiókban.

Medián számítása:

A medián sorszáma: S_{Me}=600/2=300

A kiválasztott sor meghatározása: fi'=340> S_{Me} 300, tehát a 15-20-as érték közé eső sor.

$M_e = 15 + \frac{300 - 84}{256} \cdot 5$ =19,22 – az ügyfelek egyik fele ettől az értéktől ritkábban járt a bankfiókba, másik fele pedig gyakrabban.

Módusz számítása:

Első körben kiválasztjuk a modális osztályközt: mivel a leggyakrabban a betétesek 15 és 20 közötti alkalommal látogatták a bankfiókot (256-szor), ezért ezt a sort választjuk ki.

Ezután meghatározzuk a konkrét módusz értéket:

$M_o = 15 + \frac{256 - 50}{(256 - 50) + (256 - 147)} \cdot 5 \approx 19$ – a leggyakrabban 19-szer látogatták az ügyfelek a bankfiókot.

Kvartilisek számítása:

Alsó kvartilis sorszámának a meghatározása: S_{Q1}=600/4=150, s a sor szintén a 15-20 közé eső osztályköz (340>150).

$Q_1 = 15 + \frac{150-84}{256} \cdot 5$=16,3 – az ügyfelek ¼-e 16,3-tól ritkábban jár a bankfiókba és ¾-e ettől gyakrabban fordul meg a szolgáltatónál.

Felső kvartilis sorszámának a meghatározása: S_{Q3}=3×600/4=150=450, s a sor a 20-25 közé eső tartomány (487>450).

$Q_3 = 20 + \frac{450-340}{147} \cdot 5$=23,7 – az ügyfelek ¼-e ettől az értéktől gyakrabban jár a fiókba, míg ¾-e ritkábban.

2.1.8 mintafeladat:

A következő számsor esetében számítsa ki a számított és helyzeti középértékeket!

7; 10; 11; 4; 9; 20;15; 16; 26; 25;

Megoldás:

Az alábbi táblázat alapján kaptuk a képletekbe behelyettesített értékeket:

Sorszám	**X_i**	**$(x_i-x_a)^2$**	**$1/x_i$**
1	4	106,09	0,25
2	7	53,29	0,14
3	9	28,09	0,11
4	10	18,49	0,10
5	11	10,89	0,09
6	15	0,49	0,07
7	16	2,89	0,06
8	20	32,49	0,05
9	25	114,49	0,04
10	26	136,89	0,04
Összesen:	**143**	**504,1**	**0,952506**

Számított középértékek

Számtani átlag: $\overline{X_a} = \frac{143}{10} = 14{,}3$

Mértani átlag: $\overline{X_g} = \sqrt[10]{7 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 20 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 26 \cdot 25}$ =12,4

Négyzetes átlag: $\overline{X_q} = \sqrt{\frac{504{,}1}{10}} = 7{,}1$

Harmonikus átlag:

$$\overline{X_h} = \frac{10}{1/7 + 1/10 + 1/11 + 1/4 + 1/9 + 1/20 + 1/15 + 1/16 + 1/26 + 1/25} = 10{,}5$$

Kronologikus átlag: $\overline{X_k} = \dfrac{\frac{7+25}{2} + 10 + 11 + 4 + 9 + 20 + 15 + 16 + 26}{10-1} = 14{,}11$

Helyzeti középértékek:

A fenti segédtáblázatba az eredeti sorrend nagyságrendi sorrá lett átalakítva. A helyzeti középértékeket ennek megfelelően tudjuk meghatározni.

Medián: $M_e = \frac{11+15}{2} = 13$, a két középső érték átlaga (5. és 6. sor)

Módusz: mivel minden számértékből egy darab van, így nem értelmezhető módusz.

Kvartilisek:

- Alsó kvartilis: Q_1=9, mivel 10 számból az első 5 középső értéke a 3. sor, ahol a 9-es szám található.
- Felső kvartilis: Q_3=20, mivel 10 számból a második 5 középső értéke a 8. sor, ahol a 20-as szám található.

2.1.9 mintafeladat:

Az átlagolandó értékek és a hozzájuk tartozó súlyok:

(x_i) adatok: 3, 4, 5, 8, 11, 8, 5

(f_i) súlyok: 4, 4, 1, 1, 3, 5, 6

Számítsa ki a súlyozott számtani, harmonikus, a mértani és a négyzetes átlagot!

Megoldás:

Az alábbi segédtáblában elvégzett számítások segítségével, behelyettesítve a megfelelő képletbe, lehet kiszámítani a kért átlagformákat:

x_i	f_i	$f_i \times x_i$	$f_i(1/x_i)$	$f_i(x_i-x_a)^2$
3	4	12	1,33	36
4	4	16	1,00	16
5	1	5	0,20	1
8	1	8	0,13	4
11	3	33	0,27	75
8	5	40	0,63	20
5	6	30	1,20	6
Összesen:	**24**	**144**	**4,76**	**158,00**

Számtani átlag: $\overline{X_a} = \frac{144}{24} = 6$

Harmonikus átlag:

$$\overline{X_h} = \frac{24}{4\times(1/3)+4\times(1/4)+1/5+1/8+3\times(1/11)+5\times(1/8)+6\times(1/5)} = \frac{24}{4{,}76} = 5{,}046$$

Mértani átlag: $\overline{X_g} = \sqrt[24]{3^4 \cdot 4^4 5^1 \cdot 8^1 \cdot 11^3 \cdot 8^5 \cdot 5^6 \cdot} = 5{,}491$

Négyzetes átlag: $\overline{X_q} = \sqrt{\frac{158}{24}} = 6{,}526$

2.1.10 mintafeladat:

Egy nemzetközi cég kárpátaljai nagykereskedelmi raktárában a 2012 első félévében a következő értékben készletértéket mutattak ki:

Időpont	**Készletérték (ezer UAH)**
január 1.	200
február 1.	220
március 1.	270
április 1.	260
május 1.	300
június 1.	230
június 1.	240

Feladat: Számítsa ki a raktár 2012-es évének I. és II. negyedévi, valamint félévi átlagkészletét!

Megoldás:

Mivel a készlet mindig adott állapotot tükröz, ezért időben való alakulásának átlagos értékét kronologikus átlaggal tudjuk legjobb leírni.

Fontos megfigyelni, hogy bár egy félév 6 hónapból áll, de itt mégis 7 adattal dolgozunk. Miért? Az adott hónap (pl. január) készletértékét az előző hó (2011. december) zárókészletével (ami egyben január 1-én a nyitókészlet), valamint a január végi zárókészletével (február 1-i nyitó készlet) tudjuk értelmezni. Az átlag számításakor, tulajdonképpen, folyamatosan az adott hónapok nyitó és záró készleteit átlagoljuk, majd ezeknek az átlagoknak az értékéből kiszámítunk egy újabb középértéket. Ezeket a műveleteket tudjuk egy lépésben a következő képlettel megvalósítani:

a) I. negyedév: január, február, március és ehhez kell az áprilisi nyitó készlet értéke (tehát összesen 4 érték):

$$\overline{X_k} = \frac{\frac{200+260}{2}+220+270}{4-1} = 240$$ ezer UAH az első negyedév átlagkészlete.

b) II. negyedév: április, május, június és a júliusi nyitókészlet értékei:

c) $$\overline{X_k} = \frac{\frac{260+240}{2}+300+230}{4-1} = 260$$ ezer UAH a második negyedév átlagkészlete.

d) az I. félév: január-június között és a júliusi nyitókészlet értékei:

$$\overline{X_k} = \frac{\frac{200+240}{2}+220+270+260+300+230}{7-1} = 250$$ ezer UAH az I. félév átlagkészlete.

2.1.11 mintafeladat:

Egy vállalkozás 2012-es nyeresége 150 %-a volt a 2004. évi nyereségnek.

Feladat: Állapítsa meg az évenkénti átlagos árbevétel növekedési ütemét!

A viszonyszámok összefüggés alapján tudjuk, hogy az évenkénti növekedés leírható az utolsó és első év hányadosaként. Ezzel a mértani átlag képletformával meghatározható a 8 év átlagában számolt ütemességet.

$$\overline{X_g} = \sqrt[8]{\frac{x_{2012}}{x_{2005}}} = \sqrt[8]{1,5} = 1,052,$$ azaz 5,2 %-al növekedett évente átlagosan a vállalat nyeresége.

2.2.5 Gyakorló feladatok

2.2.1 gyak.feladat:

Kárpátalján működő 31 vállalkozás évi árbevételének rangsorolt adatai, ezer UAH:

22,	24,	26,	29,	35,	42,	50,	54	60,	64,	75,	82,
86,	90,	95,	95,	95,	101,	103,	115,	123,	128,	130,	140,
150,	154,	170,	195,	200,	212,	250,					

Feladat:

a) Számítsa ki a fenti adatok alapján az átlagos árbevételt!

b) Csoportosítsa a fenti adatokat gyakorisági sorba (k = 4 sor), határozza meg a relatív gyakoriságokat is. (Felső határok: 49,99,149)

c) Határozza meg a helyzeti középértékeket (modusz, medián)!

2.2.2 gyak.feladat:

Egy üdülőkörzet vendéglátóhelyeinek haszonkulcs szerinti megoszlása:

Haszonkulcs, %	**Vendéglátóhely**
– 7,9	**8**
8 – 12,9	**14**
13 – 17,9	**18**
18 – 22,9	**12**
23 –	**9**
Összesen:	**61**

Feladat: Végezzen középérték-számítást az ismert módokon!

2.2.3 gyak.feladat:

Egy gazdálkodó egység raktárának készletértékére vonatkozó adatok:

Meg-nevezés	**Készletérték a hó utolsó napján, ezer UAH**	**Meg-nevezés**	**Készletérték a hó utolsó napján, ezer UAH**
2010. június	92	2011. január	104
július	132	február	112
augusztus	146	március	144
szeptember	114	április	124
október	120	május	138
november	146	június	104
december	98	július	122

Feladat: Számítsa ki a havi átlagos készletértéket:

a) a 2010-as év utolsó negyedévére,

b) a 2011-es év második negyedévére és a 2011-es év első félévére vonatkozóan!

2.2.4 gyak.feladat:

Egy mikro vállalkozás forgalmi értékének alakulása 1993 -2010 között:

Év	**Forgalom, ezer USD**	**Év**	**Forgalom, ezer USD**
2003	3,36	**2007**	4,70
2004	3,73	**2008**	5,08
2005	3,84	**2009**	5,46
2006	4,07	**2010**	5,50

Feladat: Állapítsa meg a forgalom évről- évre történő átlagos változásának mértékét (Ft) és ütemét (%)!

2.2.5 gyak.feladat:

Egy régió vendéglátóhelyeinek megoszlása a bevétel szerint egy nyári idényben:

Bevétel, millió Ft	**Vendéglátóhely**
– 10	**12**
10,1 – 20	**21**
20,1 – 30	**17**
30,1 – 40	**18**
40,1 –	**14**
Összesen:	**82**

Feladat:

a) Állapítsa meg az egy vendéglátóhelyre jutó átlagos bevételt!

b) Határozza meg, azt a bevételi értéket, amelyet meghalad a vendéglátóhelyek felének árbevétele!

c) Mit tekinthetünk tipikus árbevételi értéknek?

d) Vizsgálja meg a bevétel szerinti eloszlást!

2.3 Szóródás mérőszámai

A szóródás, vagy más néven változékonyság alatt a statisztikai adatok, s az adatsűrítés során fellépő eltérések milyenségére utal.

Ezek a mutatók szoros összefüggésben állnak a középértékekkel. Tulajdonképpen a középértékek által okozott „hibák" korrigálására szolgálnak. Mit is értünk ez alatt?

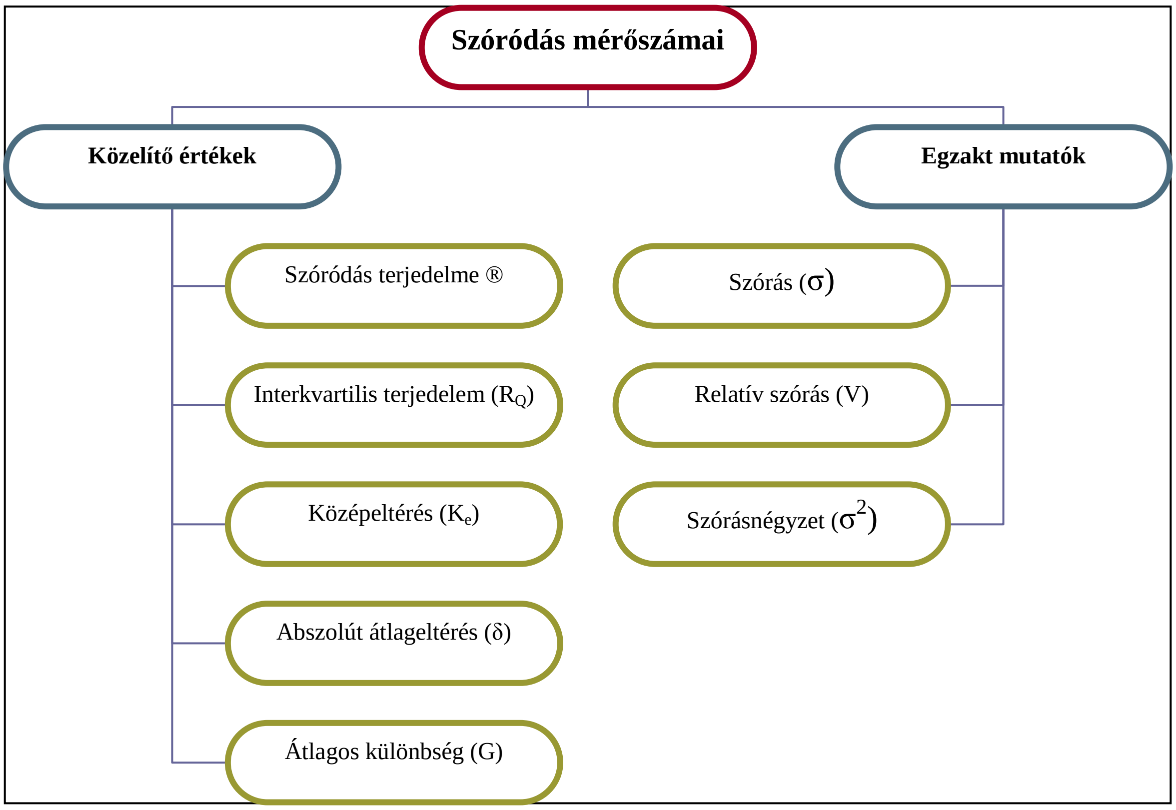
Az előző fejezetben bemutatott átlagok esetében szó esett ennek a módszernek a fontosságáról. Ott leírtam, hogy a középérték számításra azért van szükség, hogy a nagytömegű adatokat adatsűrítés segítségével közérthetőbb, megfoghatóbb formába helyezzük át. Igen ám, viszont minden egyes adatsűrítés értékvesztést is eredményezhet.

Ha egy elvont, de érzékletes példával szeretném szemléltetni, akkor a béna vadász esetét tudnám felhozni. A vadásznak van két lövési lehetősége, amikor meglátja a bokorból előugró nyulat. Mivel nem egy mesterlövészről van szó, így az első golyó 5 cm-re a nyúl előtt fúródik a talajba, míg második golyó épp 5 cm-rel mögötte. Átlagosan: telitalálat!

Hogy a valósághoz közelebb álló példát hozzak, nézzük meg Péter és Pál múlt félévi vizsga eredményeit. Péternek statisztikából 5-e lett, míg filozófia vizsgán megbukott (2-es). A két tárgy átlagában Péter félévi jegye 3,5. Pálnak statisztikából 3-a lett, míg filozófiából 4-e. Félévi átlaga 3,5. Nincs eltérés a két hallgató félévi átlaga között, mégis Pál folytathatja tanulmányait, míg Péternek meg kell ismételnie a filozófia tárgyat.

Tehát ezekből a példákból jól látható, hogy az átlagolás bár fontos és szükséges módszer, de nem mindig nyújt pontos megközelítést a valóságról. Ezért alkalmazzuk a szóródás mérőszámait is.

Bár több mutatóról van szó, de a gyakorlatban a legtöbbször a szórásról (σ) hallhatunk. A szóródás mérőszámai a következők:



2.3.1 Közelítő értékek

Sajátossága ezeknek a mutatóknak, s az így kapott értékeknek, hogy kiegészítő információt nyújtanak az adatok változékonyságáról, de nem mutatnak matematikailag teljesen pontos, egzakt értékeket. Ezek az egyszerű mutatók gyors elemzési lehetőséget biztosít amikor változékonyságra vagyunk kíváncsiak.

Szóródás terjedelme (R)

Definíció: az előforduló elemek közül a legnagyobb és legkisebb különbsége.

$$R = x_{max} - x_{min}$$

A mutatószám kifejezi, hogy mekkora értékközben mozognak az ismérvértékek. Osztályközös gyakorisági sorban nem használható, mert nyitott szélső osztályközök esetén nincs megadva a szélső határérték.

Mintapélda: a főiskolán vizsgát teljesítő hallgatók átlagos pontszáma az ETCS rendszerben 72,5 volt egy adott félévben. A szóródás terjedelme 35 és 100 pont között mozog, tehát ennek értéke: R= 65 pont.

Interkvartilis terjedelem (R_Q):

Definíció: a kvartilis értékek közötti távolság, ami a rangsorba rendezett elemek középső 50 %-nak elhelyezkedését mutatja.

Mintapélda: Az egyik régióban egy üzlettulajdonos 9 élelmiszeres üzletet üzemeltet. Az elmúlt havi forgalma a következő (nagyságsorba helyezve, ezer UAH):

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
9	13,4	15,1	16	21,5	22	22,5	23,9	25

Feladat: határozza meg a 9 üzlet átlagos árbevételét, s az interkvartilis terjedelmét!

$\overline{X_a} = \frac{168{,}4}{9} = 18{,}71$ ezer UAH.

Az interkvartilis terjedelmet meghatározásához először az alsó és felső kvartilisokat kell kijelölni.

Q_1=15,1 (3. érték) – a 9 érték közepe (mediánja) az 5. érték (21,5), ennek megint megnézzük a középső értékét (3.), s megkapjuk az alsó kvartilis értékét (15,1 ezer UAH). Ettől a forgalmi értéktől az üzletek ¾-e nagyobb bevételt produkált az adott hónapban.

Q_2=22,5 (7. érték) – a második fele a sokaságnak, s annak a középső értéke. Tehát 22,5 ezer UAH-tól az üzletek ¼-e forgalmazott többet.

Ezek után nem marad más, mint az interkvartilis terjedelem meghatározása.

R_Q=22,5-15,1=7,4 ezer UAH az üzleteknél a szóródás terjedelme, ami a 18,71 ezer hrivenyes átlag körül mozog.

Az interkvartilis terjedelem osztályközös gyakorisági sorból is számítható.

Középeltérés (K_e)

Definíció: a mediántól való eltérés abszolút értékeinek a számtani átlaga.

$$K_e = \frac{\sum |x_i - M_e|}{n}$$

Abszolút átlageltérés (δ)

Definíció: az egyedi értékeknek a számtani átlagtól mért átlagos abszolút eltérését mutatja.

egyszerű forma - $\delta = \frac{\sum |x_i - \overline{x_a}|}{n}$; súlyozott forma - $\delta = \frac{\sum f_i |x_i - \overline{x_a}|}{\sum f_i}$

Átlagos különbség (G)

Definíció: a változékonyságot a statisztikai adatok egymástól való abszolút eltérései alapján jelzi.

egyszerű forma - $G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left| x_i - x_j \right|}{n^2}$, súlyozott - $G = \frac{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} f_i \cdot f_j \left| x_i - x_j \right|}{n^2}$

Mintapélda:

5 kisvállalkozásnál dolgozók létszáma: 2; 5; 7; 9; 10.

Feladat: Számítsa ki a középértékét és a változékonyságát az alábbi közelítő értékekkel: K_e; δ; G!

Középeltérés:

Meghatározzuk a medián értékét: a sorrendbe állított adatsor középső értéke – 7 fő.

A mutató meghatározásánál rendre kivonjuk az adatokból a medián értékét, aminek az abszolút különbségeit összegezzük. A különbségekből átlagot vonunk, s így megkapjuk a szóródási mutató értékét.

$K_e = \frac{12}{5}$ =2,4 fő a középeltérés értéke.

Abszolút átlageltérés:

A mutató számítása és értékelése nagyon hasonló a középeltéréshez. Viszont itt nem a mediánhoz (tehát egy helyzeti középértékhez), hanem a számtani átlaghoz viszonyítjuk az adatok.

A sokaság átlaga x_a=6,6 fő. A segédtáblázat segítségével meghatározzuk az eltérések összegét, majd elosztjuk 5-el.

x_i	$\lvert x_i - M_e \rvert$	$\lvert x_i - x_a \rvert$
2	5	4,6
5	2	1,6
7	0	0,4
9	2	2,4
10	3	3,4
Összesen	**12**	**12,4**

$\delta = \frac{12,4}{5}$ =2,48 fő az abszolút átlageltérés értéke.

Átlagos különbség:

Az alábbi segédtábla segítségével határozzuk meg az egyes adatok a többi adathoz képest való eltéréseinek az összegét.

G	2	5	7	9	10	Összesen
2	-	3	5	7	8	**23**
5		-	2	4	5	**11**
7			-	2	3	**5**
9				-	1	**1**
10					-	**0**
						40

A különbségképzést elég egyszer elvégezni, s természetesen az átlót kihúzzuk, mert az adatokat önmagukhoz képest nem mutathatnak különbséget.

Az értékeket vízszintesen és függőlegesen összegezzük. Az aggregált értéketek elosztjuk adatok számának a négyzetével (n^2).

$$G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left| x_i - x_j \right|}{n^2} = \frac{40}{25}$$ =1,6 fő a vállalkozások alkalmazottainak átlagos különbsége.

2.3.2 Egzakt mutatók

A valóságot sokkal jobban közelítő változékonyságot kifejező szóródási mutatók tartoznak ebbe a kategóriába. A legtöbbet és leggyakrabban használt szórás mutató és az ebből képzett relatív szórás és a szórás négyzet.

Szórás (σ)

Definíció: az egyedi értékek átlagtól való eltéréseinek négyzetes átlaga, vagy az átlagtól mért átlagos négyzetes különbség.

Egyszerű forma: $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2}{n}}$

Súlyozott forma: $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{k} f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{k} f_i}}$

Relatív súlyokkal számolva: $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{k} g_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{k} g_i}}$

Osztályközös gyakorisági sorból számítva: $\sigma = i \cdot \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{k} f_i d_i^2}{\sum_{i=1}^{k} f_i} - \left(\dfrac{\sum_{i=1}^{k} f_i d_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}\right)^2}$

Belső szórásnégyzet: $\sigma_B{}^2 = \dfrac{\sum_j \sum_i (x_{ij} - \bar{x}_j)^2}{n} = \dfrac{\sum_j n_j \cdot \sigma_j{}^2}{\sum_j n_j}$

Külső szórásnégyzet: $\sigma_K{}^2 = \dfrac{\sum_j n_j \cdot (\bar{x}_j - \bar{x})^2}{\sum_j n_j}$

A külső, a belső és a teljes szórásnégyzet összefüggése: $\sigma^2 = \sigma^2{}_B + \sigma^2{}_K$

Relatív szórás (V): a számtani átlaghoz viszonyított olyan százalékos érték, amely kifejezi, hogy az egyeid értékek átlagosan hány százalékkal térnek el az átlagos értéktől.

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\%$$

Értéke 0 és 1 közötti pozitív szám, amely értelemszerűen átalakítva 0 és 100 % közötti értéket vehet fel.

A többi szóródási mutatóval szemben a relatív szórás következő előnyökkel rendelkezik:

- elvonatkoztat a mértékegységektől,
- elvonatkoztat a nagyságrendi viszonyoktól,
- segítségével megállapítható az átlag "jósága", tehát az hogy az átlag mennyire tipikus, mennyire áll közel az átlagolandó adatsorhoz.

A mértékegységtől azért „szabadulunk meg”, mert a **szórás is és az átlag is felveszi az eredeti adatsor mértékegységét**. Így, ha a két mutatót osztjuk egymással, a dimenzióval egyszerűsíthetünk.

A **nagyságrend** szintén nem számít, mert a szórást az átlaghoz viszonyítjuk, így egy százalékos skálán mérhetjük a szóródást.

Végül ez alapján **„tesztelhető”** az átlag az alábbi határértékek figyelembevételével.

Ugyanis ha a relatív szórás értéke:

- **10% alatti,** akkor az adatsor **állandó** (homogén), tehát az adatok egymáshoz és a belőlük kiszámított átlaghoz közel állnak,
- ha **10% - 20%** közötti, akkor **közepesen változékony**,
- ha **20% - 30%,** akkor erősen **változékony**,
- ha **30%** feletti, akkor **szélsőséges változékonyságú** adatsorról beszélünk, ahol az átlag már nem jellemzi jól az adatsort.

Mintapélda: *egyszerű és súlyozott szórás*

Tételezzük fel, hogy az egy gazdasági képzésben résztvevő hallgatók előző félévi mikroökonómia jegyeit vizsgálva két megállapításra jutottunk:

1. Az 5 legjobb félévi eredménnyel rendelkező hallgató mikroökonómia jegyei (pontrendszerben): 95, 87; 88; 85; 73 pont.

2. A teljes évfolyam mikroökonómia jegyei a következő képen alakultak (jegyrendszer):

   5-ös 4 fő, 4-es 9 fő, 3-as 10 fő, 2-es 4 fő.

Feladat:

a) Milyen az 5 legjobb tanuló átlageredménye és szórása?
b) Milyen a teljes évfolyam átlaga mikroökonómiából?
c) Határozza meg mindkét esetben a relatív szórást és szórásnégyzetet

Az első feladatpontot egyszerű szórással, a másodikat pedig súlyozottal kell számolni. Nézzük meg a számításoknál használt Excel-es segédtáblánkat.

Hallgató	Pontszám	$(x_i-x_a)^2$	Jegyek	Gyakoriság	f_ix_i	$f_i(x_i-x_a)^2$
1	95	88,36	2	4	8	8,78
2	87	1,96	3	10	30	2,32
3	88	5,76	4	9	36	2,42
4	85	0,36	5	4	20	9,22
5	73	158,76	-	-	-	-
Összesen:	**428**	**255,2**	**-**	**27**	**94**	**22,74**

A segédtábla első három oldala szolgáltatja az adatok táblába rendezését (1-2 oszlop) és a segédszámításokat (3.) szemlélteti.

a) Egyszerű szórás: Az első feladat a számtani átlag meghatározása (428/5=85,6 pont). A képletbe behelyettesítve a következő képen kapjuk meg az eredményt:

$\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\dfrac{255,2}{5}}$ =7,14, tehát az 5 legjobb tanuló mikroökonómiából 85,6 pontot ért el átlagosan, melytől az átlagos négyszetes eltérés (szórás) értéke 7,14 pont.

c) Relatív szórás: $V = \dfrac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\% = \dfrac{7,14}{85,6} \cdot 100\%$ =8,35 %, tehát a tanulók eredménye állandó, homogén sokaságnak tekinthető, vagyis az adatok egymáshoz és az átlaghoz közel állnak.

Szórásnégyzet: más néven a determinációs együttható. A statisztika sok területén felhasználjuk ennek a mutatónak az eredményét (lényege a regresszió- és variancia-analízis témaköreinél, a statisztika II. jegyzetben találja meg).

$$\sigma^2=7,14^2=51,04$$

b) Súlyozott szórás: Itt is először a számtani átlagot (súlyozott) kell meghatározni először. Értéke: 94/27=3,48.

Szórás: $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{k} f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{k} f_i}} = \sqrt{\dfrac{22{,}74}{27}} = 0{,}918$, tehát az évfolyamon lévő 27 tanuló átlagosan 3,48 jegyátlagot teljesített mikroökonómiából, melytől a tanulók átlagosan 0,92-al tértek el (szórás).

Relatív szórás: $V = \dfrac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\% = \dfrac{0{,}918}{3{,}48} \cdot 100\%$ =26,4 %, ami erős változékonyságot mutat a csoport jegyeinek szóródásában.

Szórásnégyzet: σ^2=$0{,}918^2$=0,842

Mintapélda: külső és belső szórás összefüggései

Ennek a szórástípusnak az alkalmazása a Satatisztika II. tárgykörébe, az összefüggés-vizsgálatok témaköréhez tartozik. Ezért, jelen fejezetben csak azért teszek említést, mivel ezek a számítások szorosan hozzátartoznak a szórás ismeretéhez.

Az összefüggések elemzésénél az un. vegyes kapcsolat (minőségi és mennyiségi ismérvek közötti) feltárására alkalmazzuk.

A szórás számítását itt is megelőzi a középérték meghatározása. Mivel ilyenkor átlagok jelentik a statisztikai adatot, ezért ebben az esetben főátlagot kell számolnunk.

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_j \cdot \overline{x_j}}{\sum_{i=1}^{k} f_j} = \frac{5 \cdot 5500 + 10 \cdot 3500 + 45 \cdot 2600 + 15 \cdot 1500}{75} = 2693{,}3 \text{ UAH.}$$

Tehát a vállalkozásban dolgozók átlagos fizetése 26,93,3 UAH.

A szóródás számítására a következő lehetőségek adódnak:

- az egyes értékek eltérése az együttes (fő) átlagtól: $x - \bar{\bar{x}}$
- az egyes értékek eltérése saját csoportjuk átlagától (részátlagtól): $x - \bar{x}$
- az egyes csoportok átlagainak (részátlagainak) az eltérése az együttes átlagtól (főátlagtól): $\bar{x} - \bar{\bar{x}}$

Az együttes szórásnégyzet felbontható a belső és a külső szórásnégyzetek összegére.

$$\sigma^2 = \sigma_B^2 + \sigma_K^2$$

Belső szórásnégyzet:

$$\sigma_B{}^2 = \frac{\sum_j \sum_i (x_{ij} - \bar{x}_j)^2}{n} = \frac{\sum_j n_j \cdot \sigma_j{}^2}{\sum_j n_j} = \frac{5 \cdot 600^2 + 10 \cdot 120^2 + 45 \cdot 350^2 + 15 \cdot 55^2}{75} = 100\,025$$

UAH

Belső szórás: σ_B =316,3

Külső szórásnégyzet:

$$\sigma_K{}^2 = \frac{\sum_j n_j \cdot (\bar{x}_j - \bar{x})^2}{\sum_j n_j} = \frac{5 \cdot (5500 - 2693)^2 + 10 \cdot (3500 - 2693)^2 + 45 \cdot (2600 - 2693)^2 + 15 \cdot (1500 - 2693)^2}{75}$$

=901 955,6

Külső szórás: σ_K =949,7

σ^2 =100 025+901 955,6=1 001 981 UAH, σ =1001

A vegyes kapcsolat szorosságát ezekből az értékekből könnyedén meg tudjuk határozni:

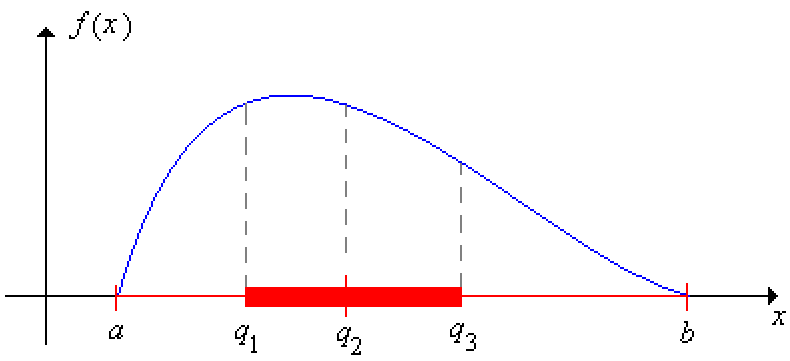
$H^2 = \frac{\sigma_K{}^2}{\sigma} = \frac{901955,6}{1001981}$ =0,9, tehát 90 %-ban meghatározza a vállalatnál dolgozók fizetését a beosztásuk.

2.3.3 Aszimmetriai viszonyok mérése

A gyakorisági sorok igen sok féle képen alakulhatnak, s ezeket ábrázolva egész változatos görbe sorozat tárulhat elénk. Viszont ennek ellenére nagy többségük bizonyos szabályszerűségeket követ, s így besorolhatóak jellegzetes típusokba.

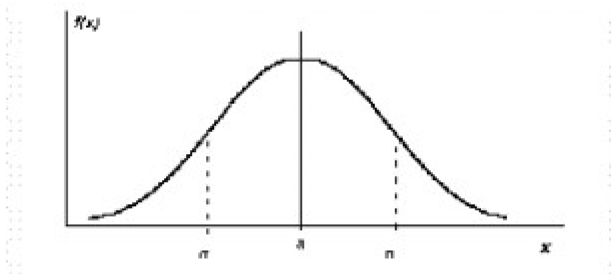
Az eloszlás lehet:

1. **Egymóduszú (unimodális) eloszlás**

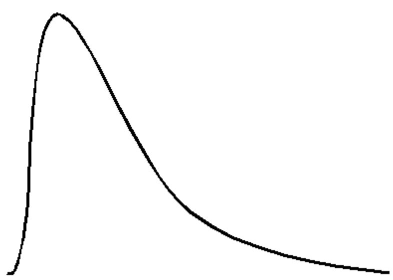


Ez az eloszlás lehet:

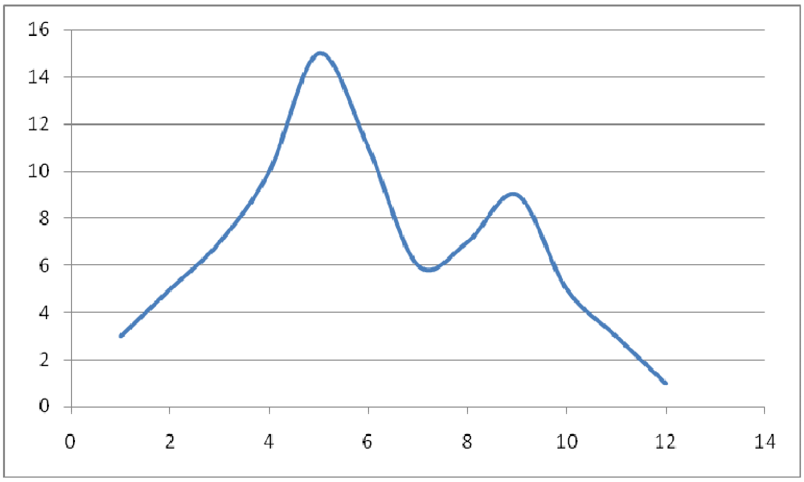
- *szimmetrikus:* $\bar{x} = Me = Mo$



- *aszimmetrikus:* $\bar{x} \neq Me \neq Mo$



2. **Többmóduszú (bi- illetve polimodális) eloszlás**



Az aszimmetria mérőszámai:

1. ***Pearson-féle mutató:*** $A = \dfrac{\bar{x} - Mo}{\sigma}$

   a. Ha $\bar{x} - Mo$ =0, akkor az eloszlás szimmetrikus

   b. Ha $\bar{x} - Mo$ >0, akkor az eloszlás baloldali

   c. Ha $\bar{x} - Mo$ <0, akkor az eloszlás jobboldali

   Mivel a szórás befolyásolja az eloszlás nagyságát, ezért ettől függetleníteni kell.

   Amennyiben a mutató értéke:

   - kisebb, mint 0,1 – igen gyenge aszimmetria
   - 0,1-0,3 között – közepesen gyenge aszimmetria
   - 0,3-0,5 között – közepes erősségű
   - 0,5-0,9 között – erős
   - 0,9-1 között – igen erős

   Fontos a mutató előjelének az értékelése, amennyiben:

   - negatív az érétke: az eloszlás jobboldali,
   - pozitív az értéke: az eloszlás baloldali.

2. ***Bowley-féle mutató (F):*** $F = \dfrac{(Q_3 - Me) - (Me - Q_1)}{(Q_3 - Me) + (Me - Q_1)}$

3. ***Yule-Pearson féle mutató (A_y):*** $A_y = \dfrac{3(\bar{x} - Me)}{\sigma}$

Mintafeladat:

Egy nagykereskedelmi egység a hétvégi vásárlások értékének megoszlását vizsgálta és a következő táblázatnak megfelelőn rendezte az adatokat:

Fogyasztás (UAH)	Vásárlás (db)
-40,00	13
40,01-45,00	27
45,01-50,00	41
50,01-55,00	49
55,01-60,00	16
60,01-	4
Összesen:	**150**

Feladat: Határozza meg a fogyasztás átlagát, szórását és aszimmetriáját!

Megoldás:

Mivel ezt a feladatot a középértékek témakörénél már elemeztük, így most annyi a feladatunk, hogy kiszámítsuk a szórást és innen pedig az aszimmetria mutatóit.

$$\bar{x}_a = 52{,}5 + \frac{-110}{150} \cdot 5 = 48{,}83 \text{ UAH}$$

$$M_e = 45 + \frac{75-40}{41} \cdot 5 = 49{,}27 \text{ UAH.}$$

$$M_o = 50 + \frac{49-41}{(49-41)+(49-16)} \cdot 5 \approx 51 \text{ UAH.}$$

$$Q_1 = 40 + \frac{37{,}5-13}{41} \cdot 5 = 44{,}5 \text{ UAH.} \qquad Q_3 = 50 + \frac{112{,}5-81}{49} \cdot 5 = 53{,}2 \text{ UAH.}$$

Szórás meghatározása: $\sigma = i \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i d_i^2}{\sum_{i=1}^{k} f_i} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i d_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} \right)^2}$

Fogyasztás (UAH)	Vásárlás (db)	d_i	$f_i d_i$	$f_i d_i^2$
-40	13	-3	-39	117
40,01-45,00	27	-2	-54	108
45,01-50,00	41	-1	-41	41
50,01-55,00	49	0	0	0
55,01-60,00	16	1	16	16
60,01-	4	2	8	16
Összesen:	**150**	**-**	**-110**	**298**

$\sigma = 5 \cdot \sqrt{\frac{298}{150} - \left(\frac{-110}{150}\right)^2}$ =6,02 UAH a fogyasztás változékonysága.

Minden adat ismert most már ahhoz, hogy kiszámítsuk az aszimmetria mutatóit.

Pearson-féle mutató: $A = \frac{\bar{x} - Mo}{\sigma} = \frac{48{,}83 - 51}{6{,}02}$ =-0,36, tehát egy közepes erősségű, jobboldali asszimetriát mutat a fogyasztási gyakoriság.

Bowley-féle mutató (F): $F = \frac{(Q_3 - Me) - (Me - Q_1)}{(Q_3 - Me) + (Me - Q_1)} = \frac{(53{,}2 - 49{,}27) - (49{,}27 - 44{,}5)}{(53{,}2 - 49{,}27) + (49{,}27 - 44{,}5)} =$ -0,096, gyenge jobboldali aszimmetria.

Yule-Pearson féle mutató (A_y): $A_y = \frac{3(\bar{x} - Me)}{\sigma} = \frac{3(48{,}83 - 49{,}27)}{6{,}02}$ =-0,22, közepesen erős jobboldali aszimmetria.

2.3.4 Gyakorló feladatok

2.3.1 gyak. feladat:

Egy községben az önkéntes segítők száma az általuk végzett munkaórák száma szerint az alábbiak szerint alakult:

A munkaórák száma	Az önkéntesek száma Fő
5–15	80
15–25	120
25–35	90
35–45	60
45–55	50
Összesen	

Feladat:

- Számítsa ki a kumulált relatív gyakoriságot, és **értelmezze** a harmadik sor adatát!
- Számítsa ki a kumulált relatív értékösszeget, és értelmezze a második sor adatát!
- Számítsa ki és **értelmezze** a számtani átlagot!
- Számítsa ki és **értelmezze** a szórást!

2.3.2 gyak. feladat:

Egy zárthelyi dolgozaton 100 pontot lehetett elérni. Az évfolyam összesített eredményét az alábbi táblázat mutatja.

Pontszámok	A hallgatók száma
0 – 20	20
20 – 40	60
40 – 60	50
60 – 80	40
80 – 100	30
Összesen	

Feladat:

- Mennyi az átlagpontszám?
- Számítsa ki és értelmezze a pontok szórását!

- Egy másik tárggyal való összehasonlítás érdekében minden pontszámot megszoroztak 2-vel. Változott-e az átlag és a szórás, ha igen, mennyivel?

2.3.3 gyak. feladat:

Egy kft kereseti viszonyait az alábbi táblázat mutatja be.

Kereseti csoportok ezer Ft/fő	**Alkalmazottak (fő)**
40 – 60	42
60 – 80	65
80 – 100	49
100 – 120	28
120 – 140	16
Összesen	**200**

Feladat:

- Határozza meg és értelmezze a relatív gyakoriságokat, az értékösszegsort, a relatív értékösszegsort, és ezeknek kumulált sorait!
- Határozza meg az átlagkeresetet!
- Határozza meg és értelmezze a szórást!
- Melyik osztályközbe esik a módusz, és hogyan értelmezzük?

2.3.4 gyak. feladat:

Valaki Beregszász főterén felmérést végzett, hogy a piacra betérők milyen pénzmennyiséget tartanak maguknál. A megkérdezett 15 fő a következő válaszokat adták: 300; 120; 250; 1 000; 1 500; 120; 100; 50; 90; 560; 900; 800; 200; 150; 50 UAH.

Feladat:

a) Határozza meg és értelmezze a mediánt és a kvartiliseket!
b) Számítsa ki és értelmezze:
   - a szóródás terjedelmét,
   - a középeltérést,
   - az abszolút átlageltérést,
   - a kvartilis eltérést!

2.3.5 gyak. feladat:

Egy ukrajnai régió vállalatainak vagyon szerinti megoszlását mutatja a következő táblázat:

Vagyon (ezer UAH)	**Vállalkozók száma (db)**
-50,0	15
50,1-100,0	29
100,1-150,0	14
150,1-200,0	7
250,1	5
Összesen:	**70**

Feladat:

a) Nevezze meg a statisztikai sor típusát!

b) Számítsa ki és értelmezze:

- a helyzetmutatókat,
- a szóródási mérőszámokat,
- az aszimmetria mérőszámait!

2.3.6 gyak. feladat:

Egy rendelőintézetben adott héten a betegek várakozási ideje a következőképpen alakult:

Várakozási idő (perc)	**Betegek megoszlása (%)**
-15,0	15
15,1-25,0	25
25,1-35,0	30
35,1-45,0	15
45,1-55,0	10
55,1-	5
Összesen:	**70**

Feladat:

a) Határozza meg az átlagos várakozási időt!

b) Számítsa ki és értelmezze a szóródási mérőszámokat!

c) Állapítsa meg az eloszlás aszimmetriájának irányát és mértékét!

2.3.7 gyak. feladat:

Egy munkahelyen a márciusi havi fizetések átlaga 2165 hriveny, mediánja 2 200 UAH, szórása 135 UAH. Ha áprilisban mindenki 70 hrivennyel több fizetést kap, mint az előző hónapban, akkor az áprilisi fizetések átalga …………. UAH, a medián ………… UAH, a szórás …………, a relatív szórás pedig ……….. lesz.

Feladat: töltse fel a hiányzó adatokat!

2.3.8 gyak. feladat:

Egy gyakorisági sor Pearson-féle mutatója: -0,3; számtani átlaga: 85. Az átlagtól való átlagos eltérés 30 %.
Feladat: Állapítsa meg a módusz értékét!

2.3.9 gyak. feladat:

Egy kft. dolgozóinak havi átlagkeresete és nem szerinti megoszlása 2005 végén:

Kereset (eFt/fő)	**Létszám (fő)**	
	Nő	**Férfi**
-75,0	15	10
75,1-90,0	34	25
90,1-105,0	45	38
105,1-120,0	27	50
120,1-135,0	12	29
135,1-	7	8
Összesen:	**140**	**160**

Feladat: Határozza meg, hogy van-e összefüggés a nem és az átlagkeresetek között! (külső-belső szórásnégyzetek, vegyes kapcsolat)

2.3.10 gyak. feladat:

Egy városban a kereskedelemben és a vendéglátásban tevékenykedő 9, illetve 10 vállalkozás 2004 évi árbevétele M Ft-ban:

Kereskedelem: 10, 21, 20, 16, 28, 22, 15, 20, 36, átlag: 20,9 szórás: 7,1

Vendéglátás: 11, 15, 17, 12, 18, 20, 10, 16, 8, 14, átlag: 14,1 szórás: 3,6

Feladat: Végezzen elemzéseket a szórásfelbontás módszerének alkalmazásával.

2.3.11 gyak. feladat:

Egy üdülőkörzet szállodáinak adatai kategóriák szerint:

Kategóriák	Szállodák száma	Szobakihasználtság, %	Szobakihasználtság szórása, %
Öt-és négycsillagos	45	55,1	3,8
Háromcsillagos	205	41,0	4,2
Kétcsillagos	130	34,5	5,2
Egycsillagos	48	30,0	5,4
Együtt	418	39,3	8,1

Feladat: a) Jellemezze a szobakihasználtság szóródását három megközelítésben!

b) Végezzen számításokat arra vonatkozóan, hogy a szobakihasználtság szóródása hány %-ban magyarázható azzal, hogy a szálloda milyen kategóriába tartozik!

b) Határozza meg a kategóriába tartozás és a szobakihasználtság kapcsolatának szorosságát!

2.3.12 gyak. feladat:

Egy rendelőintézetben adott héten a betegek várakozási ideje a következőképen alakult:

Várakozási idő (perc)	**Betegek száma (fő)**
-15,0	15
15,1-25,0	25
25,1-35,0	30
35,1-45,0	15
45,1-55,0	10
55,0-	5
Összesen:	**100**

Feladat: *Határozza meg az átlagos várakozási időt és értelmezze annak változékonyságát! Állapítsa meg az eloszlás aszimmetriáját!*

2.3.13 gyak. feladat:

Egy fuvarozó vállalat tehergépkocsi állományának teherbírás szerinti összetétele a következő:

Teherbírás (tonna)	**Gépkocsik száma (db)**
-2,00	20
2,01-4,00	25
4,01-6,00	19
6,01-8,00	12
8,01-10,00	10
10,01-	7
Összesen:	**93**

Feladat: *Határozza meg az átlagos várakozási időt és értelmezze annak szórását! Állapítsa meg az eloszlás aszimmetriáját!*

2.4 Indexszámítás és standardizálás

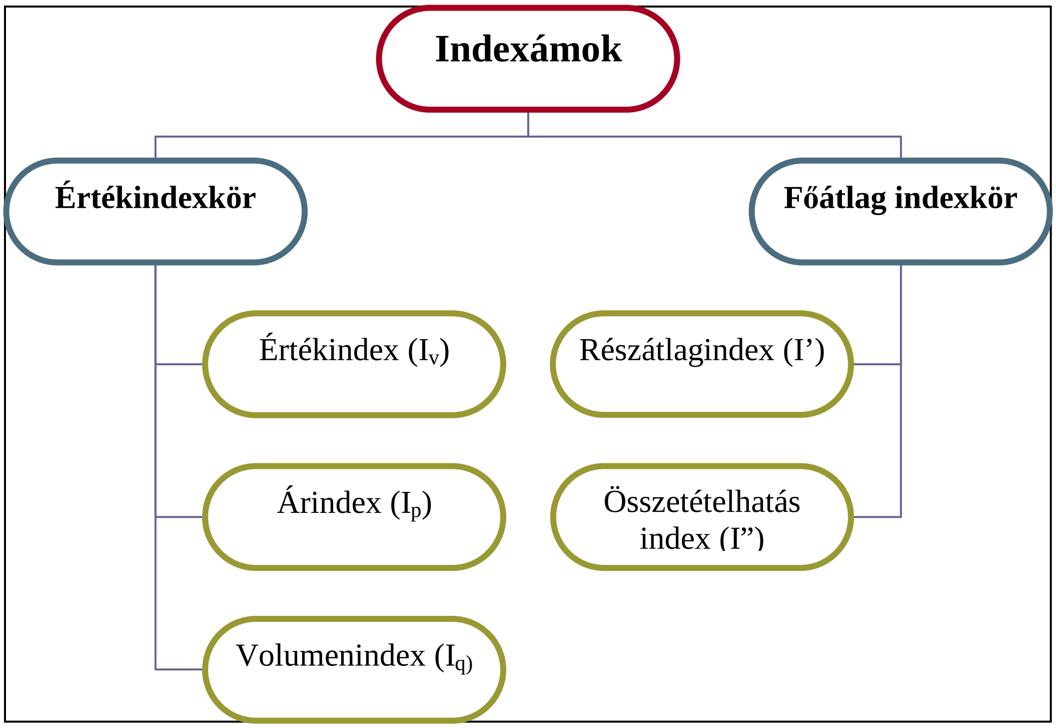
Definínció:
Indexám: két vagy több, valamilyen szempontból együvé tartozó, de az adatok jellegét tekintve különnemű, közvetlenül nem összesíthető statisztikai adat együttes átlagos változását kifejező összetett összehasonlító viszonyszám.
Az indexek komplexitásából fakadóan egyszerre lehetnek:

- összetett viszonyszámok,
- átlagok, melyek időbeli vagy területi változást tükrözhetnek.

Amiért felmerül az indexámítás szükségessége, az a közös mértékegységben történő számbavétel problematikájából adódik. A gazdasági életben ez leggyakrabban akkor merül fel, amikor különböző termékek (vállalaton, iparágon belül, vagy akár az egész országot nézve is) termelésében változások merülnek fel, s ezek a termékek/szolgáltatások más-más mértékegységgel bírnak (tonna, hektár, liter, m^3 stb.), melyek nem aggregálhatóak (összegezhetőek), s ezért közös nevező kell találni, ami a leggyakrabban a pénz, a termékek ára.
Így jutunk el odáig, hogy a termelési értékben, az iparág, az ország stb. teljesítményében való változást (értékváltozás, I) nem csak a termelés volumene (q), hanem annak ára (p) is befolyásolja.
Ezeket a mennyiségi és áradatokat (p, q) két féle képen értelmezhetjük:

- bázis időszakra: q_0, p_0,
- tárgy időszakra: q_1, p_1

Módszertani szempontokat figyelembe véve a következő ábrának megfelelő rendszerben csoportosíthatók az indexek:



A továbbiakban megvizsgáljuk az értékindexör elemeit egyedi és aggregált formában.

2.4.1 Az egyedi érték, ár és volumenindex összefüggése

Egyedi értékindex: $i_v = \dfrac{q_1 \cdot p_1}{q_0 \cdot p_0}$

Egyedi árindex: $i_p = \dfrac{p_1}{q_0}$

Egyedi volumenindex: $i_q = \dfrac{q_1}{q_0}$

Összefüggések: $i_q \cdot i_p = i_v$

Mintapélda:

Egy termék ára 5 UAH és a boltban eladnak belőle egyik hónapban 150 db-t. A következő hónapban az ára felmegy 6 UAH-ra, s ekkor értékesítenek belőle 155 db-t.

Egyedi értékindex: $i_v = \dfrac{q_1 \cdot p_1}{q_0 \cdot p_0} = \dfrac{155 \cdot 6}{150 \cdot 5} = \dfrac{930}{750} = 1{,}24$, tehát 24 %-al nőtt az értékesítés a termékből.

Egyedi árindex: $i_p = \frac{p_1}{q_0} = \frac{6}{5} = 1{,}2$, tehát az értéknövekedésnek 20 %-ban az árnövekedés az okozója.

Egyedi volumenindex: $i_q = \frac{q_1}{q_0} = \frac{155}{150} = 1{,}033$, tehát az értéknövekedésnek 3,3 %-ban a volumenváltozás az okozója.

$i_v = i_q \cdot i_p = 1{,}033 \cdot 1{,}2 = 1{,}24$

Az egyedi indexek az egyszerűbb esetek, viszont a valóságban több termékkel és változó árakkal kell számolnunk, erre mutatnak megoldást a következő módszerek.

Értékindex

Definíció: A termékek, cikkek összességére nézve a termelési (eladási stb.) érték együttes, átlagos változását mutatja.

Értékindex:

$$I_v = \frac{\sum q_1 \cdot p_1}{\sum q_0 \cdot p_0} = \frac{\sum q_0 \cdot p_0 \cdot \frac{q_1 \cdot p_1}{q_0 \cdot p_0}}{\sum q_0 \cdot p_0} = \frac{\sum q_0 \cdot p_0 \cdot i_v}{\sum q_0 \cdot p_0} = \frac{\sum q_1 \cdot p_1}{\sum \frac{q_1 \cdot p_1}{q_1 \cdot p_1 / q_0 \cdot p_0}} = \frac{\sum q_1 \cdot p_1}{\sum \frac{q_1 \cdot p_1}{i_v}}$$

Volumenindex:

Definíció: különböző termékekből termelt, eladott, forgalmazott vagy fogyasztott mennyiségek együttes átlagos változását mutatja.

Laspeyres-féle volumenindex:

$$I_q^L = \frac{\sum q_1 \cdot p_0}{\sum q_0 \cdot p_0} = \frac{\sum q_0 \cdot p_0 \cdot \frac{q_1}{q_0}}{\sum q_0 \cdot p_0} = \frac{\sum q_0 \cdot p_0 \cdot i_q}{\sum q_0 \cdot p_0} = \sum w_0 \cdot i_q$$ - Bázisidőszaki súlyozású

ahol $w_0 = \frac{q_{i0} \cdot p_{i0}}{\sum_i q_{i0} \cdot p_{i0}}$

Paasche-féle volumenindex:

$$I_q^P = \frac{\sum q_1 \cdot p_1}{\sum q_0 \cdot p_1} = \frac{\sum q_1 \cdot p_1}{\sum \frac{q_1 \cdot p_1}{q_1 / q_0}} = \frac{\sum q_1 \cdot p_1}{\sum \frac{q_1 \cdot p_1}{i_q}}$$ - Tárgyidőszaki súlyozású

Fisher-féle volumenindex: $I_q^F = \sqrt{I_q^L \cdot I_q^P}$

Árindex

Definíció: a különböző termékek, árucikkek árainak együttes, átlagos változását, röviden árszínvonal változását mutatja.

Laspeyres-féle árindex:

$$I_p^L = \frac{\sum q_0 \cdot p_1}{\sum q_0 \cdot p_0} = \frac{\sum q_0 \cdot p_0 \cdot \frac{p_1}{p_0}}{\sum q_0 \cdot p_0} = \frac{\sum q_0 \cdot p_0 \cdot i_p}{\sum q_0 \cdot p_0} = \sum w_0 \cdot i_p$$ - Bázisidőszaki súlyozású

Paasche-féle árindex:

$$I_p^P = \frac{\sum q_1 \cdot p_1}{\sum q_1 \cdot p_0} = \frac{\sum q_1 \cdot p_1}{\sum \frac{q_1 \cdot p_1}{p_1 / p_0}} = \frac{\sum q_1 \cdot p_1}{\sum \frac{q_1 \cdot p_1}{i_p}}$$ - Tárgyidőszaki súlyozású

Fisher-féle árindex: $I_p^F = \sqrt{I_p^L \cdot I_p^P}$

Indexek közötti összefüggések:

$$I_v = I_q^L \cdot I_p^P \qquad I_v = I_q^P \cdot I_p^L \qquad I_v = I_q^F \cdot I_p^F$$

2.4.2 Standardizálás

A főátlagok különbségei alapján

Főátlagok különbsége: $$K = \overline{V_1} - \overline{V_0} = \frac{\sum B_1 \cdot V_1}{\sum B_1} - \frac{\sum B_0 \cdot V_0}{\sum B_0}$$

Részátlagok különbségének hatása: $$K' = \overline{V_1} - \overline{V_s} = \frac{\sum B_1 \cdot V_1}{\sum B_1} - \frac{\sum B_1 \cdot V_0}{\sum B_1}$$

$$K' = \overline{V_s} - \overline{V_0} = \frac{\sum B_0 \cdot V_1}{\sum B_0} - \frac{\sum B_0 \cdot V_0}{\sum B_0}$$

Összetételhatás: $$K'' = \frac{\sum B_1 \cdot V_1}{\sum B_1} - \frac{\sum B_0 \cdot V_1}{\sum B_0}$$

$$K'' = \frac{\sum B_1 \cdot V_0}{\sum B_1} - \frac{\sum B_0 \cdot V_0}{\sum B_0}$$

Összefüggésük: K=K’+K”

Főátlag indexkör indexei: Az összetett intenzitási viszonyszámok hányadosa alapján

Kiinduló alap a heterogén sokaságok elemzésének azon sajátossága, hogy a homogén részeit külön kell jellemeznünk átlaggal, és ezek súlyozott átlagai alapján képezhetjük a heterogén sokaság főátlagát.

Főátlagindex

Definíció: a heterogén sokaság átlagos színvonalának dinamikus változását mutatja.

Főátlagindex: $$I = \frac{\overline{V_1}}{\overline{V_0}} = \frac{\dfrac{\sum B_1 \cdot V_1}{\sum B_1}}{\dfrac{\sum B_0 \cdot V_0}{\sum B_0}} = \frac{\dfrac{\sum f_1 \cdot x_1}{\sum f_1}}{\dfrac{\sum f_0 \cdot x_0}{\sum f_0}}$$

A főátlag értékét két tényező határozza meg:

- a részátlagok nagysága (x1; x2) - Részátlagindex
- a fősokaság összetétele (f0, f1) – Összetétel hatás index.

Ezt a műveletsort másképpen standardizálásnak is nevezzük. A standardizálás lényege, hogy a főátlagokat a részátlagok súlyozott átlagaként kiszámítjuk oly módon, hogy a két tényező valamelyike szempontjából összehasonlíthatóvá tesszük azokat, majd az így kapott standardizált főátlagokat hasonlítjuk össze.

Részátlagindex

Definíció: a részátlagok megváltozásának a főátlag változására gyakorolt hatását fejezi ki. Megmutatja azt, hogy miként változott volna a főátlag, ha a változás kizárólag a részátlagok megváltozásából adódott volna.

Részátlagindex: $$I' = \frac{\dfrac{\sum B_0 \cdot V_1}{\sum B_0}}{\dfrac{\sum B_0 \cdot V_0}{\sum B_0}} = \frac{\dfrac{\sum f_0 \cdot x_1}{\sum f_0}}{\dfrac{\sum f_0 \cdot x_0}{\sum f_0}} \frac{\sum B_0 \cdot V_1}{\sum B_0 \cdot V_0} = \frac{\sum B_0 \cdot V_0 \cdot \dfrac{V_1}{V_0}}{\sum B_0 \cdot V_0}$$

vagy $$I' = \frac{\dfrac{\sum B_1 \cdot V_1}{\sum B_1}}{\dfrac{\sum B_1 \cdot V_0}{\sum B_1}} = \frac{\sum B_1 \cdot V_1}{\sum B_1 \cdot V_0} = \frac{\sum B_1 \cdot V_1}{\sum \dfrac{B_1 \cdot V_1}{V_1 / V_0}}$$

Összetételhatás index

Definíció: a fősokaság összetételében bekövetkezett változásnak a főátlag változására gyakorolt hatását fejezi ki. Azt mutatja be, hogy miként változott volna a főátlag, ha a változás kizárólag az összetétel megváltozásából adódott volna.

Összetételhatás indexe: $$I'' = \frac{\dfrac{\sum B_1 \cdot V_1}{\sum B_1}}{\dfrac{\sum B_0 \cdot V_1}{\sum B_0}} = \frac{\dfrac{\sum f_1 \cdot x_1}{\sum f_1}}{\dfrac{\sum f_0 \cdot x_1}{\sum f_0}}$$ vagy

$$I'' = \frac{\dfrac{\sum B_1 \cdot V_0}{\sum B_1}}{\dfrac{\sum B_0 \cdot V_1}{\sum B_0}} = \frac{\dfrac{\sum f_1 \cdot x_0}{\sum f_1}}{\dfrac{\sum f_0 \cdot x_1}{\sum f_0}}$$

Összefüggés: $I = I' \cdot I''$

2.4.3 *Mintafeladatok:*

Egy vállalat négy fajta terméket forgalmaz. 2012 novemberi és decemberi adatai a következők:

Termék	Értékesített mennyiség (db)		Eladási ár (Hr/db)	
	2012. nov.	2012. dec.	2012. nov.	2012. dec.
A	80	94	65	75
B	105	110	55	60
C	60	55	40	60
D	35	45	80	90

Feladat:

a) Számítsa ki az egyedi érték-, ár-, és volumenindexeket az „B" termékre nézve!
b) Számítsa ki az együttes érték-, ár-, és volumenindexeket!
c) Értelmezze az egyes indexeket!

A feladat megoldását könnyíti, ha egy segédtáblában előre kiszámítjuk a képleteinkbe felhasználásra kerülő aggregátumokat. Ezt a segédszámítást a következő táblázat tartalmazza:

Termék	Értékesített mennyiség (db)		Eladási ár (Hr/db)		Segédszámítások			
	q0	q1	p0	p1	q0p0	q1p1	q0p1	q1p0
A	80	94	65	75	5200	7050	6000	6110
B	105	110	55	60	5775	6600	6300	6050
C	60	55	40	60	2400	3300	3600	2200
D	35	45	80	90	2800	4050	3150	3600
Összesen	**-**	**-**	**-**	**-**	**16175**	**21000**	**19050**	**17960**

a) Egyedi indexek meghatározása:

$i_v = \frac{q_1 \cdot p_1}{q_0 \cdot p_0} = \frac{6600}{5775} = 1{,}143$ - tehát a „B" termék értéknövekedése 14,3 %-os volt egyik hónapról a másikra. Ennyivel nőtt az árbevétel egy hónap alatt az adott termékből.

$i_p = \frac{p_1}{q_0} = \frac{60}{55} = 1{,}091$ – tehát az értéknövekedést 9,1 %-ban a B termék árának a növekedése okozta. Ilyen értékű árnövekedés következett be a terméknél egy hónap alatt.

$i_q = \frac{q_1}{q_0} = \frac{110}{105} = 1{,}048$ – tehát az értéknövekedést 4,8 %-ban a termékben bekövetkező értékesítési mennyiség növekedése okozta. Ennyivel nőtt a B termék volumene egyik hónapról a másikra.

b) Együttes indexek meghatározása:

$I_v = \frac{\sum q_1 \cdot p_1}{\sum q_0 \cdot p_0} = \frac{21000}{16175} = 1{,}2983$ – tehát a vállalat értékesítési árbevétele 29,83 %-al nőtt egy hónap alatt. Ez a változás két tényezőnek tudható be: az árváltozásnak és a volumenváltozásnak.

Laspeyres-féle volumenindex, bázisidőszaki súlyozású

$I_q{}^L = \frac{\sum q_1 \cdot p_0}{\sum q_0 \cdot p_0} = \frac{17960}{16175}$ =1,1104 – tehát árváltozás nélkül az értékesítés árbevétele a volumenváltozás hatására 11,04 %-al nőtt volna, amennyiben bázisidő súlyozással számítjuk az indexet.

Paasche-féle árindex, tárgyidőszaki súlyozású:

$I_q{}^P = \frac{\sum q_1 \cdot p_1}{\sum q_0 \cdot p_1} = \frac{21000}{19050}$ =1,102 – tehát tárgyidőszaki súlyozással a vállalat értékesítésének volumenváltozása 10,2 %-os növekedést mutat.

Fisher-féle árindex: $I_p{}^F = \sqrt{I_p{}^L \cdot I_p{}^P} = \sqrt{1{,}110 \cdot 1{,}102} =$ 1,1063, azaz a keresztezett volumenindex alapján a mennyiségi változás hatására az értékesítés 10,63 %-al bővült egy hónap leforgása alatt.

Laspeyres-féle árindex, bázisidőszaki súlyozású:

$I_p^{\ L} = \dfrac{\sum q_0 \cdot p_1}{\sum q_0 \cdot p_0} = \dfrac{19050}{16175} = 1{,}178$ – tehát volumenváltozás nélkül az értékesítés árbevétel az árváltozás hatására bázisidőszaki súlyozással 17,8 %-kal növekedett.

Paasche-féle árindex, tárgyidőszaki súlyozású:

$I_p^{\ P} = \dfrac{\sum q_1 \cdot p_1}{\sum q_1 \cdot p_0} = \dfrac{21000}{17960} = 1{,}169$ – tehát tárgyidőszaki súlyozással a vállalat értékesítésének volumenváltozása 16,9 %.

Fisher-féle árindex: $I_p^{\ F} = \sqrt{I_p^{\ L} \cdot I_p^{\ P}} = \sqrt{1{,}178 \cdot 1{,}169} = 1{,}173$ – azaz átlagosan 17,3 %-al növekedett a vállalat árbevétele az árváltozás hatására.

c) Értelmezés jelen feladatmegoldásban a számítások mellett lettek megadva.

2.4.4 Gyakorló feladatok:

Egy termelő vállaltról a következő információk ismertek:
2009-ben az árbevétele 145 000 UAH. Ami 32 000 UAH-val több, mint az előző évben. A vállalat egy terméket állít elő és értékesít, amelynek a piaci árváltozása az említett időszakban 20 %-os növekedést mutatott.
Feladat: *Határozza meg az értékindexet! Számítsa ki a volumenváltozást százalékban és azt, hogy a volumenhatás önmagában milyen árbevétel növekedést eredményezett volna!*

Egy szolgáltató vállalatról a következő információk ismertek:

A 2009-es árbevétele 60 000 UAH. A vállalat egy szolgáltatást kínál. A 2010-es évre nézve a volumen csökkenés (index) 5 %-os volt, az árnövekedés 30 %-os.
Feladat: *Határozza meg az értékindexet és a 2010-es évi árbevételt!*

A Magyarországra látogató külföldiek száma és költése a látogatás célja szerint:

Látogatás célja	Látogatók száma, ezer fő		Költés, millió Ft	
	2004	2010	2004	2010
Turisztikai	12697	13362	559366	828041
Nem turisztikai	21237	26542	262434	361778
Együtt	33934	39904	821800	1189819

Feladat: a) Számítsa ki az alábbi táblázat adatait!

Látogatás célja	Fajlagos költés ezer Ft/fő		Fajlagos költés 2010-ben 2004=100 %	Látogatók megoszlása, %	
	2004	2010		2004	2010
Turisztikai					
Nem turisztikai					
Együtt					

b) elemezze a fajlagos költés változásában közrejátszó tényezők hatását!

Egy üdülőkörzet vendégforgalmára vonatkozó adatok két évben:

Vendég	Bázisidőszak		Tárgyidőszak	
	Ezer vendég	tartózkodás, nap/vendég	Ezer vendég	tartózkodás, nap/vendég
Belföldi	1050	3,5	1305	4,5
Külföldi	2700	6,1	2450	6,8
Együtt	3750		3755	

Feladat: a) Határozza meg a két időszakra az egy vendégre jutó együttes átlagos tartózkodási időt!

b) Elemezze az átlagos tartózkodási idő változását, mutasson rá az abban közrejátszó tényezők hatására!

c) Készítsen eredménytáblázatot, írjon rövid szöveges elemzést!

Egy gazdasági szervezet termeléséről az alábbiak ismertek:

Termék	Mérték-egység	Termelt mennyiség		Egységár, UAH		Változás, %		
		2010	2011	2010	2011	Mennyiség	Egys.ár	Érték
A	tonna	25	28	400	440			
B	db	10000	9500	40	50			
C	m^3	400	410	260	270			
Együtt								

Feladat: Számítsa ki az érték-, ár- és volumenváltozásokat kifejező mutatókat, helyezze el azokat a fenti táblában!

Egy vállalkozás két szállítótól vásárol egy bizonyos cikket a termeléséhez, az alábbi adatok szerint:

Meg-nevezés	Mennyiség , tonna		beszerzési egységár UAH/t	
	2009	2010	2009	2010
I. szállító	1100	1000	50	5500
II. szállító	700	1400	20	2200
Összesen	1800	2400		

Feladat: Mutassa ki hrivnyában, hogy az összes beszerzési érték hogy változott, és ebben az egyes tényezőknek milyen szerepük volt!