MATEMATIKAI ANALÍZIS I.

Jegyzet

Sztojka Miroszláv

Beregszász 2020

Tartalomjegyzék

Előszó 3
1. Elemi függvények és grafikonjaik. Értelmezési tartomány 5
2. Számsorozatok és függvények határértéke 16
3. A függvények folytonossága 30
4. A deriváltfüggvény 37
5. Derivált alkalmazása 56
6. Függvényvizsgálat 68
7. Határozatlan integrál 77
Irodalomjegyzék 92

Előszó

Ez a jegyzet elsődlegesen elsőéves matematikus hallgatók számára készült, e szak tematikáját követi. A matematikai analízis ismeretek a matematika szinte minden területén és az alkalmazásokban nélkülözhetetlenek. A matematikai analízis minden képzett matematikus matematikai műveltségének lényeges alkotórésze.

A matematikai analízist, a differenciál- és integrálszámítást kezdetben a végtelen kicsiny mennyiségekkel, az ún. infinitezimálisokkal történő számolás jellemezte. Ezért szokás ezt az eljárást infinitezimális számításnak nevezni. Ezek azonban a matematikában megkövetelt szabatosság hiányában csak megsejtett eredmények igazolásai, bizonyításai voltak. A tényleges számítást csak a határérték fogalmának tisztázása tette volna lehetővé, azaz annak a felfedezése, hogy az infinitezimálisok valójában határértékek. A 18. században Euler bevezette a ma használatos függvény fogalmát. Ezután a valós függvények analízise elkezdett különválni az analízis más részeitől. Ennek első lépése, hogy Bolzano 1816-ban megalkotta a ma is használatos folytonosság definícióját. Ugyanakkor Bolzano munkája egészen az 1870-es évekig széles körben ismeretlen maradt. 1821-ben Cauchy megkezdte az analízis szigorú formalizálását azzal, hogy első lépésként elutasította az úgynevezett algebra általánossága elvét, amelyet korábban elterjedten alkalmaztak az analízisben, például Euler is. Ehelyett Cauchy formalizálta az analízist, geometriai elvekre és infinitezimálisokra építve azt. Így az ő folytonosság definíciója azt követelte meg, hogy egy x infinitezimális változásához y-nak is infinitezimális változása tartozzék. Bevezette a Cauchy-sorozatokat is, és elkezdte kidolgozni a formális definíciókra épülő komplex analízist. Poisson, Liouville, Fourier és mások pedig a parciális differenciálegyenleteket tanulmányozták. Ezen és más matematikusok, mint Weierstrass együttműködése vezetett a határérték ma használt (ε, δ)-ás definíciójához, vagyis a mai modern analízis alapjához.

A 19. század közepén Riemann bevezette a saját integrálelméletét. A század vége felé Weierstrass, aki úgy gondolta, hogy a geometriai bizonyítások nem kielégítőek – vagy egyenesen félrevezetőek –, bevezette a határérték (ε, δ)-ás definícióját. Ezután a figyelem középpontjába a valós számok teljessége került. Dedekind a valós számokat Dedekind-vágással (Dedekind-szelet) vezette be, amely definíciójából következően teljes. Ezzel egy időben megindult a valós Riemann-integrálható függvények tulajdonságainak vizsgálata a szakadások tekintetében.

A jegyzet felöleli a tudományegyetemek matematika-tanárszakos és matematikushallgatói által az első félévben elsajátítandó matematikai analízis ismereteket. Bizonyára számottevő segítséget fog tehát nyújtani az említett hallgatóknak és mindazoknak, akik a matematikai analízis iránt akár önmagáért, akár pedig a matematika más ágaiban játszott szerepe folytán érdeklődnek. Megjegyezzük a segédeszköz korlátozott terjedelmével kapcsolatban, hogy az elméleti ismeretek bizonyítás nélkül vannak megadva.

A jegyzet fő célja, hogy bemutassa a matematikai analízis első félévének tipikus feladatait, melyeket az órákon és önállóan lehet megoldani. Minden fejezet egy tipikus feladatokból álló változat megoldását is tartalmazza.

1. Elemi függvények és grafikonjaik. Értelmezési tartomány

Legyen D egy tetszőleges valós számokból álló halmaz. Ha minden $x \in D$ megfeleltetünk pontosan egy valós $f(x)$ számot, akkor azt mondjuk, hogy a D halmazon f függvény van értelmezve. A D halamazt értelmezési tartományának, és az $E = \{y \in R | y = f(x),\ x \in D\}$ – halmazt pedig az $f(x)$ függvény értékkészletének nevezzük.

Főbb elemi függvények:

1. Hatványfüggvény - $y = x^a,\ a \in R.$
2. Exponenciális függvény - $y = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1.$
3. Logaritmus függvény - $y = log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1.$
4. Trigonometrikus függvények - $y = sin x, y = cos x, y = tgx,$ $y = ctgx.$
5. Arkuszfüggvények (*a trigonometrikus függvények inverzei*) - $y = arcsin x,\ y = arccos x,\ y = arctgx,\ y = arcctgx.$

OM-1.1

1. Határozza meg az alábbi függvények értelmezési tartományát:

a) $y = \dfrac{7x - 20}{5x^2 - 2x + 5}$; b) $y = \dfrac{x^2 - 2}{2x^2 - 3x + 1}$;

c) $y = \dfrac{10}{|x| - 5}$; d) $y = \dfrac{\sqrt{x+3}}{x-2} - \dfrac{x+5}{\sqrt[4]{3x}}$;

e) $y = 5^{\frac{7 \sin x}{x+\pi}}$; f) $y = log_x \sqrt{\dfrac{x+1}{2-x}}$;

g) $y = arccos \dfrac{3x-5}{4}$; h) $y = ctg\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$;

i) $y = log_{|x|} |2x - 3|$!

2. Ábrázolja az alábbi függvényeket:

a) $y=\dfrac{10}{|x|-5}$; b) $y=\dfrac{6}{x-2}$;

c) $y=2x^2-4x+1$; d) $y=2^{|x-3|}$;

f) $y=3\left|sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\right|$; g) $y=\dfrac{1}{2}tg\,2x$;

h) $y=\left|log_{\frac{1}{3}}|x-1|\right|$!

ÖM-1.1

1. 1) Határozza meg az alábbi függvények értelmezési tartományát:

a) $y=\dfrac{3x-15}{4x^2-x-3}$; b) $y=\sqrt{\dfrac{5-2x}{3x-6}}$; c) $y=log_{(x+1)}|x+1|$!

2) Ábrázolja az alábbi függvényt:

$$y=|2cos\,x+3|!$$

2. 1) Határozza meg az alábbi függvények értelmezési tartományát:

a) $y=\dfrac{x^2+5}{1-|2x-3|}$; b) $y=\sqrt{\dfrac{5-2x}{3x-6}}$; c) $y=\log_{(x+1)}|x+1|$!

2) Ábrázolja az alábbi függvényt:

$$y=3tg\left(x-\frac{\pi}{4}\right)!$$

3. 1) Határozza meg az alábbi függvények értelmezési tartományát:

a) $y=\dfrac{5x-1}{1-4x^2}-\dfrac{9}{x^3+64}$; b) $y=\sqrt[4]{\dfrac{3x^2+x+2}{3x-2}}$;

c) $y=arcsin\dfrac{3x-4}{5}$!

2) Ábrázolja az alábbi függvényt:

$$y=2log_2|x+2|!$$

IM-1.1

I. Határozza meg az alábbi függvények értelmezési tartományát:

1. a) $y=\dfrac{x^2-x+2}{2x^2+x+5}$; b) $y=\sqrt{2-x^2}+\sqrt{x+1}$.

c) $y=e^{\frac{25\sin x}{x+5}}$!

2. a) $y=\dfrac{7x-4}{3x^2-27}$; b) $y=\dfrac{3}{\sqrt{x-5}}-\dfrac{\sqrt{x+3}}{3}$;

c) $y=ln|3x+4|$!

3. a) $y=\dfrac{5x^3-x+9}{3x-2}$; b) $y=\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x^2-9}}+\dfrac{5}{x-4}$;

c) $y=sin\sqrt{\dfrac{7}{x+\pi}}$!

4. a) $y=\dfrac{17}{3x^2-7x+4}$; b) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^3+1}}{(x+3)(x-3)}$;

c) $y=arccos(3x-6)$!

5. a) $y=\dfrac{77x^3-11}{5x^4-9x^2+4}$; b) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x^4-16}$;

c) $y=cos\dfrac{5}{|x|+11}$!

6. a) $y=\dfrac{9}{x^3+x^2-5x-125}$; b) $y=\dfrac{\sqrt{x+3}}{x^2+5x}$;

c) $y=tg\left(7x+\dfrac{\pi}{6}\right)$!

7. a) $y=\dfrac{5-x}{9+4x-13x^2}$; b) $y=\sqrt{3x^2-27}+\dfrac{1}{3-x}$;

c) $y=sec\left(\dfrac{x}{5}+\dfrac{\pi}{2}\right)$!

8. a) $y=3-\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{2x^2-8}$; b) $y=\sqrt{\dfrac{x-5}{3-x}}$;

c) $y=lg(x^2-25)$!

9. a) $y=\frac{7}{7-x^2}+\frac{5}{|x|-2}$; b) $y=\frac{2x^2-8}{x\sqrt{x-2}}$;

c) $y=cos\,ec\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$!

10. a) $y=\frac{3}{(x-7)(x^2+2)}$; b) $y=\frac{\sqrt[4]{13-x}}{\sqrt{2x}}$;

c) $y=arcsin\frac{2x+5}{3}$!

11. a) $y=\frac{4x^2-9x+5}{12x-4}+\frac{3}{|x|+3}$; b) $y=\frac{x^3-8}{\sqrt[3]{x-1}}$;

c) $y=ctg\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)$!

12. a) $y=\frac{44x-4}{33x-3}+\frac{3}{|x|+3}$; b) $y=\frac{\sqrt{x}}{x-2}-\frac{x-2}{\sqrt{x}}$;

c) $y=log_x(x+2)$!

13. a) $y=\frac{5}{x-5}+\frac{4}{3x^2-75}$; b) $y=\frac{15\sqrt{x-1}+4}{3-\sqrt{x}}$;

c) $y=arctg\sqrt{x}$!

14. a) $y=\frac{13}{x^2+4}\cdot\frac{x}{(x+2)^2}$; b) $y=\frac{2}{\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4}$;

c) $y=\sqrt{7^{3x}-1}$!

15. a) $y=\frac{8x-1}{5x^2-9}$; b) $y=\sqrt{|x|-5}$;

c) $y=\frac{4}{lg\,4x}$!

16. a) $y=\frac{x^2+2x+1}{x^3+1}$; b) $y=\frac{\sqrt{x^2-36}}{\sqrt[3]{x^2+6x}}$;

c) $y=arcsin(x^2+1)$!

17. a) $y=\frac{7}{x^2+9}-\frac{3}{x^2-3}$; b) $y=\sqrt{\frac{7x}{2-x}}$;

c) $y = arcctg\,\frac{1}{\sqrt{x}}$!

18. a) $y = \frac{19}{2x^2 - 3x + 1}$; b) $y = \sqrt{12 - x - 11x^2}$;

c) $y = \frac{\sin x}{3|x| + 2}$!

19. a) $y = \frac{4x + 2}{2x^2 - x - 1}$; b) $y = \frac{17}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{3x - 4}$;

c) $y = \frac{5x + 3}{cos\,3x}$!

20. a) $y = \frac{5 + 9x}{7x} - \frac{1}{x - 7}$; b) $y = \frac{\sqrt{5 - x^2}}{|x| - \sqrt{5}}$;

c) $y = 2^x tg\,5x$!

21. a) $\frac{3x^2 - 75}{x^2 + 9}$; b) $y = \frac{\sqrt{5 - x^2}}{|x| - \sqrt{5}}$;

c) $y = \frac{cos\,5x}{e^{3x}}$!

22. a) $\frac{8x}{12 - x} \cdot \frac{x}{|x| - 12}$; b) $y = \sqrt{\frac{x^2 - 3x}{x + 2}}$;

c) $y = \frac{2}{x} ctg\,\frac{x}{2}$!

23. a) $y = \frac{15 - x}{x^4 - 5x^2 + 4}$; b) $y = \frac{\sqrt{2x - 7}}{\sqrt[3]{x^3 - 64}}$;

c) $y = 5^{lg\frac{5}{|x|}}$!

24. a) $\frac{3x}{9 - x^2} + \frac{x^2}{x^3 + 8}$; b) $y = \frac{\sqrt{2 - 3x}}{x\sqrt{x + 5}}$;

c) $y = \frac{5e^{\frac{1}{x}}}{cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}$!

25. a) $y=\dfrac{5x+5}{x^3+1}$; b) $y=\dfrac{\sqrt{9-4x^2}}{\sqrt{2x^2-3x+1}}$;

c) $y=\dfrac{arctg\sqrt{x}}{arcsin\,x}$!

26. a) $y=\dfrac{7}{x^2-2}-\dfrac{2}{3x^2+9}$; b) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-64}}{x+7}$;

c) $y=arccos\sqrt{4x-3}$!

27. a) $y=\dfrac{x+2}{x-2x^2}$; b) $y=\dfrac{28}{\sqrt{|x|-3}}+\sqrt{x^2-5}$;

c) $y=log_2(2x-5)+\dfrac{2}{x-5}$!

28. a) $y=\dfrac{4}{2|x|-8}$; b) $y=\sqrt{\dfrac{x-13}{12-2x}}$;

c) $y=lg\,\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+x+1}$!

29. a) $y=\dfrac{5x^2-4x-1}{3x^2+10x-13}$; b) $y=\dfrac{\sqrt{17-x}+\sqrt{17+x}}{x\sqrt{16-x^2}}$;

c) $y=5^{\frac{1}{x-3}}\,arcsin\dfrac{x}{3}$!

30. a) $y=\dfrac{4x+\frac{2}{x}}{3-\frac{5}{x}}$; b) $y=\sqrt{\dfrac{x^2(x-5)}{x^2-25}}$;

c) $\sqrt{lg\,x^2-4}$!

II. Ábrázolja az alábbi függvényeket:

1. a) $y=|2x-1|$; b) $y=-\dfrac{4}{4-x}$; c) $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+3}$!

2. a) $y=3x^2-5x+2$; b) $y=\sqrt{x-1}-3$; c) $y=log_3|x+2|$!

3. a) $y=2|x|+4$; b) $y=\dfrac{5-x}{x-3}$; c) $y=2\left|sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\right|$!

4. a) $|y|=x-2$; b) $y=\sqrt{2x}-3$; c) $y=3^{|x|-1}-2$!

5. a) $|y| = |x| + 2$; b) $y = -\sqrt{x} + 5$; c) $y = \left| log_{\frac{1}{2}} x \right| - 3$!

6. a) $y = |3x - 2|$; b) $y = \dfrac{6}{2 - x}$; c) $y = 2tg\left(x - \dfrac{\pi}{4} \right)$!

7. a) $y = \dfrac{1}{2}|x| + 2$; b) $y = 3x^2 + 6x - 1$; c) $y = 4^{-x} - 2$!

8. a) $|y| + |x| = 4$; b) $y = \dfrac{2x - 1}{x + 2}$; c) $y = |lg|x||$!

9. a) $y = |3 - x|$; b) $y = 2x^2 - 4x - 3$; c) $y = cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3} \right)$!

10. a) $y = 10 - |x|$; b) $y = \dfrac{5}{x^2 + 1}$; c) $y = \left| tg \dfrac{x}{2} \right|$!

11. a) $y = \dfrac{|x|}{2} + 1$; b) $y = x^2 - 2|x| + 1$; c) $y = -2^{x-3}$!

12. a) $y = -|7x - 5|$; b) $y = 3 - \sqrt{x + 2}$; c) $y = log_2 |x - 5|$!

13. a) $y = 3 - 2|x|$; b) $y = \dfrac{5x - 3}{5x}$; c) $y = |ctgx| + 2$!

14. a) $y = -(2 + |x|)$; b) $y = 4x^2 + 4x - 8$; c) $y = 1 - 3^{|x|}$!

15. a) $y = -|x + 3|$; b) $y = -\sqrt{2x - 4}$; c) $y = 2 sin\, x - 3$!

16. a) $y = |3x - 5|$; b) $y = \dfrac{4x - 1}{4x + 1}$; c) $y = |ln\, x| - 2$!

17. a) $y = 3|x| - 1$; b) $y = x^2 + 6x + 9$; c) $y = \dfrac{1}{2}|sin\, x| - 2$!

18. a) $|y| = x + 2$; b) $y = \left| \sqrt{x} - 2 \right|$; c) $y = \left(\dfrac{1}{3} \right)^x - 2$!

19. a) $|y| = 3 - |x|$; b) $y = 5 - \sqrt{x}$; c) $y = -|lg\, x| + 1$!

20. a) $y = 2 + |x|$; b) $y = \left| \dfrac{8}{x - 2} \right|$; c) $y = -|cos\, x|$!

21. a) $y = |x - 2| + 2$; b) $y = 3 - 2x - x^2$; c) $y = 1 - 2^{x-2}$!

22. a) $y = 5 - |x|$; b) $y = \dfrac{3x - 1}{3x + 2}$; c) $y = -|log_2 x|$!

23. a) $y=|2x-4|$; b) $y=3-\sqrt{x}$; c) $y=2+sin|2x|$!

24. a) $|y|+|x|=5$; b) $y=x^2-4|x|+1$; c) $y=arcsin\,x+\frac{\pi}{2}$!

25. a) $y=-|x+1|+3$; b) $y=\frac{4}{|x|}-2$; c) $y=arccos\,x-\pi$!

26. a) $y=3-|x+1|$; b) $y=\frac{4x+3}{x+1}$; c) $y=3^{-|x|}+2$!

27. a) $y=|3-x|+4$; b) $y=\sqrt{x+2}-2$; c) $y=log_{\frac{1}{2}}|x|$!

28. a) $y=-|x|+2$; b) $y=2-6x-x^2$; c) $y=|arctgx|$!

29. a) $y=|x-1|+3$; b) $y=|4-x^2|$; c) $y=2arcctgx$!

30. a) $y=|5|x|-7|$; b) $y=-|x^2-5|$; c) $y=2^{|x|+1}+3$!

Tipikus változat megoldása

1. Határozza meg az alábbi függvények értelmezési tartományát:

a) $y=\frac{x-3}{2x^2-3x+1}$; b) $y=\sqrt{\frac{3-x}{2x+4}}+\frac{5}{x+2}$;

c) $y=log_{|x+5|}|x-3|$!

Megoldás.

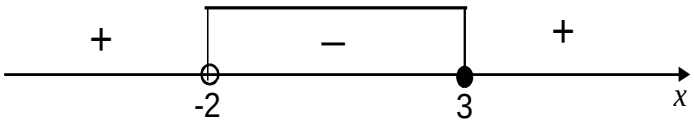
a) A megadott függvény akkor értelmezett, ha $2x^2-3x+1\neq 0.$ Megoldjuk a következő másodfokú egyenletet $2x^2-3x+1=0.$ Kapjuk: $x_1=1; x_2=\frac{1}{2}.$ Tehát,

$$D(y)=\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};1\right)\cup(1;\infty).$$

b) A függvény akkor értelmezett, ha

$$\begin{cases}\frac{3-x}{2x+4}\geq 0,\\ x+2\neq 0,\end{cases}\quad\begin{cases}\frac{-(x-3)}{2(x+2)}\geq 0,\\ x\neq -2\end{cases}\Rightarrow\ \frac{x-3}{x+2}\leq 0,$$

Intervallumok módszerével, kapjuk:



tehát, $x \in (-2;3]$.

c) Logaritmus függvények definíciója alapján:

$$\begin{cases} |x+5| > 0; \\ |x+5| \neq 1; \\ |x-3 > 0;| \end{cases} \quad \begin{cases} x+5 \neq 0; \\ x+5 \neq \pm 1; \\ x-3 \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \neq -5; \\ x \neq -4; \\ x \neq -6; \\ x \neq 3; \end{cases}$$

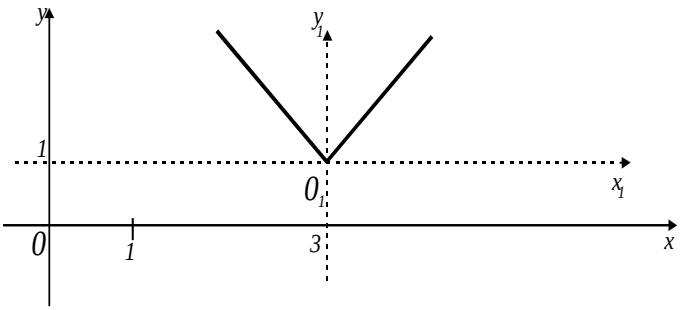
vagyis, $x \in (-\infty;-6) \cup (-6;-5) \cup (-5;-4) \cup (-4;3) \cup (3;\infty)$.

2. Ábrázolja az alábbi függvényeket:

a) $y = |x-3| + 1$; b) $y = |x^2 - 3x + 2|$; c) $y = 3^{|x-2|} + 1$!

Megoldás.

a) Felírjuk a függvényt a következő képen: $y - 1 = |x-3|$ és legyenek az új koordináták $x_1 = x - 3,\ y_1 = y - 1;$ így megkapjuk az $x_1O_1y_1$ koordinátarendszert, melynek az origója $O_1(3;1)$, és ebben ábrázoljuk az $y_1 = |x_1|$ függvény grafikonját (lásd az 1.1. ábrát) vagy másképp felírva $y_1 = \left[\begin{array}{l} x_1, ha\ x_1 \geq 0, \\ -x_1, ha\ x_1 < 0. \end{array} \right.$



1.1. ábra

b) Kiemeljük a teljes négyzetet:

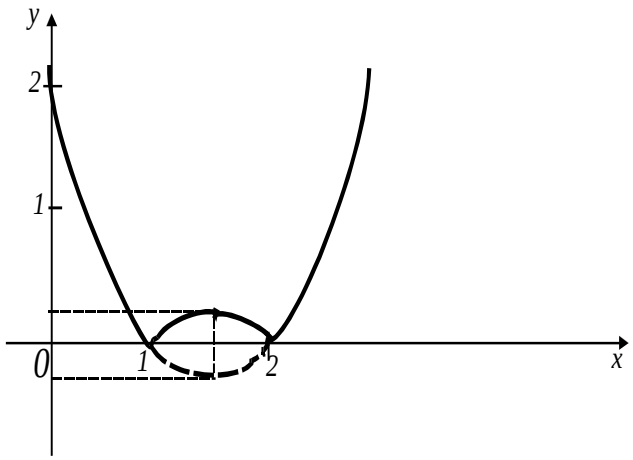
$$x^2 - 3x + 2 = \left(x^2 - 2x \cdot \frac{3}{2} + \frac{9}{4}\right) - \frac{9}{4} + 2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

és párhuzamosan eltoljuk az $y = x^2$ parabolát az Ox tengely mentén $\frac{3}{2}$ egységnyire, az Oy tengely mentén $-\frac{1}{4}$ egységnyire. Számításba vesszük, hogy az $y = \left|x^2 - 3x + 2\right|$, vagyis $y \geq 0$ minden $x \in R$. Szimmetrikusan ábrázoljuk az Ox tengelyhez a grafikon alsó részét (lásd az 1.2. ábrát).

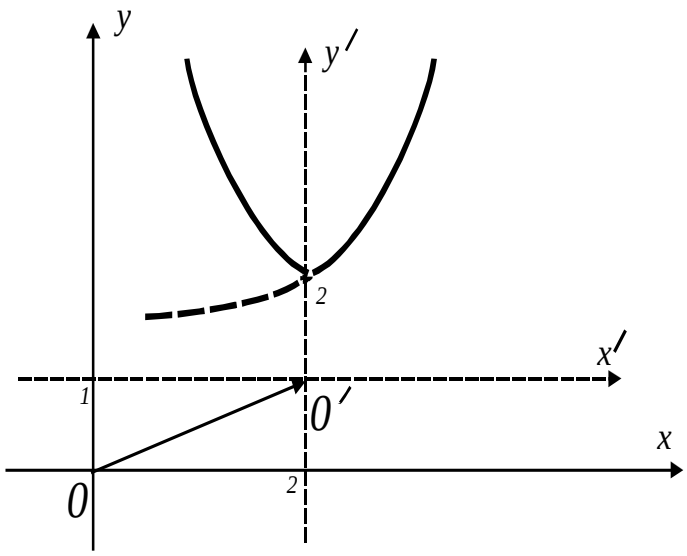
c) Végrehajtjuk párhuzamos eltolását *xOy* koordinátarendszernek az $\overline{OO'}$ (2;1) vektorra. Az új $x'Oy'$ koordinátarendszerben ábrázoljuk az $y' = 3^{|x'|}$ függvény grafikonját az alábbi sorban:

1) $y' = 3^{x'}$;

2) $y' = 3^{|x'|}$ grafikonja szimmetrikus az $y' = 3^{x'}$ grafikonjához az $O'y'$ tengelyhez viszonyítva (lásd az 1.3. ábrát).



1.2. ábra



1.3. ábra

2. Számsorozatok és függvények határértéke

1. Számsorozatok határértéke. Valós számok sorozatának az $f: N \to R$ függvényt nevezzük, mely az összes természetes számok halmazán van értelmezve. Az $f(n)$ szám n-dik tagja a sorozatnak, melyet x_n –el jelölünk és az $x_n = f(n)$ az általános tagjának képletének nevezzük. A számsorozat jelölése: $\{x_n\}_{n \in N}$.

A sorozat konvergens, és az A-hoz konvergál, ha bármilyen $\varepsilon > 0$ értékre a sorozatnak véges sok tagja van az A szám ε környezetén belül: $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N, \forall n > n_0, |a_n - A| < \varepsilon$.

2. Függvények határértéke.

Heine-féle meghatározás:

Az $f: M \to R,\ M \subset R$ függvény határértéke az $x = a$ helyén az A szám, ha bármely $x = a$-hoz konvergáló $(x_n),\ x_n \in M$ abszcissza sorozathoz tartózó függvényértékek $(f(x_n))$ sorozata az A-hoz tart: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

***Cauchy-féle meghatározás*:**

Az $f: M \to R,\ M \subset R$ függvény határértéke az $x = a$ helyén az A szám, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ hogy bármely az a szám δ környezetéből vett abszcisszához tartózó függvényérték az A szám ε környezetéhez tartozik: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, ha $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$, hogy ha $0 < |x - a| < \delta$, akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Nevezetes határértékek:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$;

2) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$.

OM-2.1

1. Igazolja, hogy az $\{x_n\} = \left\{\dfrac{2n+7}{n-1}\right\}$ sorozat határértéke az $A = 2$ szám!

2. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{3n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{9n+2}{n+247}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{72-5n}{3+8n}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{89-11n}{6-3n}$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{n^2}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+2n}{4+n^2+n^3}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{18n^2+2n^5}{8-n^6-7n^4}$; 8) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{32n-62n^2+3n^3}{3n^4+23}$; 9) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+5}{n}$;

10) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\sin n!}{n^2+1}$; 11) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{16-n+9n^2-4n^6}{3+13n+5n^5}$;

12) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^8+99n^6-35n^4-5n^2+6}{78-n-n^3-n^5+6n^7}$; 13) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3n-5)^4-5n^5}{n^3-(4n-6)^5}$;

14) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3}{n^2+1}-\frac{3n^2}{3n-1}\right)$; 15) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$; 16) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n(n-4)}}{\sqrt{5+(1+n)^2}}$;

17) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3+5+...+7}}{3n-7}$; 18) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+...+n}{\sqrt{9n^2+1}}$;

19) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+13}}{\sqrt[5]{n^{10}+7n}-8}$; 20) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n+5n^9}+(n-2)(n+4)}{(2+3n)^3}$;

21) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{C_n^3}{6n^3-5n+12}$; 22) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{C_n^4+n^4+5n}{C_n^{n-3}}$!

ÖM-2.1

Határozza meg az alábbi határértékeket:

1. a) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-7x+10}{x^2-5x+6}$; b) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-25}$;

   c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{tg\,5x}$; d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)^{3x}$;

   e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\left(\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2+1}\right)\right)$!

2. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+3x^2-x-1}{5x^2-4x+5}$; b) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{6x^2-5x+1}{8x^3-1}$;

c) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x+5}-2}{x^2-1}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0} (1+\sin x)^{3ctgx}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x+\sin 5x}{2arctg 4x}$!

3. a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^2-5x+1}{9x-14x^2}$;

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^2-4x+3}$;

c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+13}-4}{x^2-9}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{7-x}{3-x}\right)$;

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 4x}{x\sin x}$!

IM -2.2

Határozza meg az alábbi határértékeket:

1. a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-5x+4}{2-4x+9x^2}$;

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3-3x^2+5}{7x^2-20}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-9}{2x^2-5}$;

d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4x+4}{x^3-8}$;

e) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$;

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 8x}{3x^2}$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+4}{x+8}\right)^{-3x}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+1}{5x+4}\right)^{x+1}$;

i) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3}\right)$!

2. a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7-5x^3}{4x^3-9x+7}$;

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x^4+5x^2-7}{4-x^3}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-x+9}{3-x^5}$;

d) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2x^2+11x+15}{3x^2+5x-12}$;

e) $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$;

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{tg 4x}$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+4}{x+8}\right)^{-3x}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+1}{5x+4}\right)^{x+1}$;

i) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\frac{2}{x^2-4}-\frac{1}{x+2}\right)$!

3. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5-4x^3+1}{7x-8x^5}$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x^7-3x^2}{3x^6-5}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+7}{3x^3+5}$; d) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{6+x-x^2}{x^3-27}$;

e) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{6+x-x^2}{x^3-27}$; f) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+5}\right)^{\frac{5x^2}{3}}$; h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{3x+1}\right)^{x+2}$;

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-3}\right)$!

4. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2-5x+1}{2x^2-4}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9-5x^3}{2x-4}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{25x^2-16}{x^3-x^2+x-1}$; d) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{3x^2-x-2}$;

e) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt{2-x}\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$; f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\,3x}{2\sin x}$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{x-5}\right)^{1-x}$; h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{7x-5}{2x+9}\right)^{3x}$;

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x+2}\right)$!

5. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9x^3-4x+7}{x^3-8}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^3-2x^2+5}{4x-2}$;

c) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{11x-8}{3x^2+x-8}$; d) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-x^2+x+1}{x^4-1}$;

e) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$; f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x-\sin x}{5x}$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4-x}{1-x}\right)^{\frac{x}{2}}$; h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{3x+4}\right)^{x+3}$;

i) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{2}{x^2-9}\right)$!

6. a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3-3x^2+7}{9-x^3}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{15-4x+x^3}{2-x}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+5}{9x^5-3x^2+4}$; d) $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{12+x-x^2}{x^3+27}$;

e) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{12+x-x^2}{x^3+27}$; f) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{arcsin\,5x^4}{sin\,3x}$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{-5x}$; h) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{5x+8}{x-2}\right)^{x+4}$;

i) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{2x^2-1}\right)$!

7. a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7-2x^5}{4-4x+6x^5}$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^3-2x+1}{x^2-4x+4}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x-3}{x^3-27}$; d) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}} \dfrac{3x^2+2x-1}{27x^3-1}$;

e) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{3x^2+2x-1}{27x^3-1}$; f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{1-x}{3-x}\right)^{x+2}$; h) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x}{2x-3}\right)^{-x}$;

i) $\lim\limits_{x\to-2} \left(\dfrac{3}{x^2+x-2}+\dfrac{x}{x+2}\right)$!

8. a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3-2x+10x^2}{7-2x-4x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7-x^4-x^5}{x^4-2x+3}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5-7x+x^2}{9x^3-3x^2}$; d) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^2-4x-5}{x^2-2x-3}$;

e) $\lim\limits_{x\to4} \dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$; f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-sin\,x}{\pi-2x}$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{5+x}{x-3}\right)^{\frac{x}{4}}$; h) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x-2}{2x+2}\right)^{x+2}$;

i) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{x-3}-\sqrt[3]{x+1}\right)$!

9. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^3-4x^2+1}{3x-5x^3}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{2x+2}\right)^{x+2}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2-3x+1}{3x^3-2x+3}$; d) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2+2x-1}{-x^2+x+2}$;

e) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$; f) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg\,2x-sin\,2x}{x^2}$;

g) $\lim\limits_{x\to0}(1+sin\,x)^{ctgx}$; h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3-5x}{1-4x}\right)^{\frac{x}{3}}$;

i) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{5}{x-1}-\dfrac{3}{x^2-1}\right)$!

10.a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-3x^3+5}{7x^4-2x^2+1}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-x^5}{3-x^3}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-5}{x^3+x^2-1}$; d) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$;

e) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{\sqrt{3x+17}-\sqrt{2x+122}}{x^2+8x+15}$; f) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-cos^2x}{xtgx}$;

g) $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{3}{x}}$; h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{4x-5}\right)^{5x}$;

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{3+x}\right)$!

11.a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-3x^2+5}{7-x^2-5x^3}$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3+2x+x^3}{3x^2-x+4}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7-x}{2+x-x^2}$; d) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x^2+x-6}$;

e) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-1}$; f) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{tgx}-\dfrac{1}{sin\,x}\right)$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+4}\right)^{2x-3}$; h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-3}{x+4}\right)^{x+3}$;

i) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$!

12. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7-3x^3}{2x^3-5x+1}$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^5-x^3+2}{3x^2-5}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-x-x^2}{3x^3-9}$;

d) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$;

e) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{7-x}-\sqrt{7+x}}{\sqrt{7}x}$;

f) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{sin^2 3x-isn^2x}{x^2}$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x-3}\right)^{x+1}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3-x}{5-3x}\right)^{2x}$;

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-2}\right)$!

13. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^2-x+1}{3x-9x^2+1}$;

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^4-5x+1}{x^2-4x}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9-x}{x^3-8}$;

d) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-16}{x^2+x-20}$;

e) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$;

f) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{sin\,7x}{5tg\,2x}$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4-x}{2-x}\right)^{\frac{x^2}{2}}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-7}{10x+5}\right)^{x+3}$;

i) $\lim\limits_{x\to5}\left(\dfrac{5}{x-5}-\dfrac{1}{x^2-25}\right)$!

14. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^7-3x^5+9}{4-x-14x^7}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^6-x^4+x^2}{x^2-4}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-27}{x^3+64}$;

d) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{4x^2+11x-3}{x^2+2x-3}$;

e) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$;

f) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-cos\,5x}{2x^2}$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+5x}{5x-3}\right)^{\frac{2x}{3}}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x-1}{5x+2}\right)^{x+1}$;

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x-1}\right)$!

15.a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x-4x^2+x^5}{3x^5-4}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-4x^2-2}{x^2-2x+1}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9-x}{x^2+4x-5}$;

d) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{5+x}-2}{\sqrt{8-x}-3}$;

e) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{5+x}-2}{\sqrt{8-x}-3}$;

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{2x^2}$;

g) $\lim\limits_{x\to 0}(1+tgx)^{cosecx}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5-x}{4-3x}\right)^{2x}$;

i) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{5}{x-1}-\dfrac{4}{x^2-1}\right)$!

16. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9-x^4}{5x^2-x^4+7}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{12}-3x^3+9}{3x^5-x^6}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-x^2}{7-5x^{10}}$;

d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{8x^3-64}{3x^6-6x^5}$;

e) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{8x^3-64}{3x^6-6x^5}$;

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\,2x}{tg\,5x}$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+5}\right)^{3x-2}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{x+8}\right)^{5x}$;

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x}\right)$!

17. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^3-5x^2+11}{7-2x-3x^3}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9-x^5}{4x^4+x-9}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+1}{5x^3+x^2-9}$;

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$;

e) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x-3}-2}{\sqrt{x+2}-10+x}$;

f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\sin 2x}{\pi-4x}$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7-x}{4-x}\right)^{2x}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-9}{5x+4}\right)^{x-2}$;

i) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{4x}{4-x^2}\right)$!

18. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-x^2+9x}{7x^2-4}$;

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^5-x^3+5}{2x^2+9}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-4}{x^3+5x}$;

d) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{9x^2+17x-2}{x^2+2x}$;

e) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2+2x-15}$;

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos^3 4x}{3x^2}$;

g) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(2tgx-1)^{tg\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{7x-3}{5-x}\right)^{3x}$;

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x}\right)$!

19. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3-9x+4}{7-x^3}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{11x^5-7x}{5x^4-3x}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x-9}{4x^2+x-2}$;

d) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{2x^2-9x+10}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{x^2+4}}{5x^2}$;

f) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{sin\,2x}-\frac{1}{tg\,2x}\right)$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+5}\right)^{\frac{x}{2}}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2-x}{3-4x}\right)^{x+1}$;

i) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{3}{x+1}-\frac{3}{x^2-1}\right)$!

20. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{14x^2-5x+1}{9-x^2}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7-5x-x^3}{x^2-9x+1}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x-2}{5x^2-9}$;

d) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2+5x-42}{x^2-5x+6}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{x^2+4}-2}$;

f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\,3x-sin\,3x}{2x^2}$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5-x}{9-x}\right)^{3x}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x}{3x-1}\right)^{2x+1}$;

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x+4}-\sqrt[3]{x}\right)$!

21. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-x^2-1}{5x-3x^2-x^3}$;

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^5-x^3-2}{3+x^4}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2+x+2}{x^3-4}$;

d) $\lim\limits_{x\to -5}\frac{x^2-x-30}{x^3+125}$;

e) $\lim\limits_{x\to 9}\frac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}$;

f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{cos^2 x-cos^2 2x}{x^2}$;

g) $\lim\limits_{x\to 0}(cos\,x)^{ctgx}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{3x-1}\right)^{\frac{x}{4}}$;

i) $\lim\limits_{x\to 5}\left(\dfrac{x}{x-5}-\dfrac{5}{x^2-25}\right)$!

22. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+x^5-3}{9x^5-x+4}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-9}{x+3}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2}{3-x+x^2}$; d) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+3x-28}{x^3-64}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sqrt{6-x}-\sqrt{6+x}}$; f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\,5x}{sin\,3x}$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x-1}\right)^{\frac{3x}{2}}$; h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3-4x}{2-x}\right)^{2x}$;

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\left(\sqrt{x}-\sqrt{x^2+5}\right)\right)$!

23. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^2-3x+x^3}{3x^2-5x^3+1}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7-x-x^4}{x^3-2}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-9}{5x^3+7}$; d) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{27x^3-1}{9x^2-1}$;

e) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{3x+4}-4}$; f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-cos^2 2x}{x\,arctgx}$;

g) $\lim\limits_{x\to -\pi/4}(2+tgx)^{\frac{1}{x+\pi/4}}$; h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-5}{6x+1}\right)^{x-1}$;

i) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3}{x}-\dfrac{3}{x^2-x}\right)$!

24. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x+5}{7-4x^3}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-5x}{7-x}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{15x-2}{x^3+x^2+9}$; d) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{5x^2+5x-10}{3x^2+11x+10}$;

e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{2-x}}{\sqrt{x+3}-2}$; f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,sin\,x}{1-cos\,6x}$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2-3x}{4-3x}\right)^{5x}$; h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-2}{x+3}\right)^{\frac{x}{4}}$;

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\sqrt{x^2+2}\right)$!

25. a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{18x^3 - x + 1}{3 - 5x^3}$;

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{9x^7 - x^5}{x^6 - 9x}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - 3x + 7}{7x^3 + 4}$;

d) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{3x^2 + x - 10}{x^2 - 4}$;

e) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{\sqrt{3x} - 3}{\sqrt{6} - \sqrt{2x}}$;

f) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\cos 4x - \cos 2x}{5x^2}$;

g) $\lim\limits_{x\to2} (3 - x)^{\frac{5}{x-2}}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2 - x}{3 - 5x}\right)^{7x}$;

i) $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$!

26. a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{11x^2 - 9x + 1}{2x^2 - 3x - 1}$;

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3 - x^5}{x^2 - 3}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7 - x}{x^2 + 5x - 6}$;

d) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x + 2x^2}{4x^3 - 5x^2 + x}$;

e) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{4 - \sqrt{8x}}{4 - x^2}$;

f) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^2 \sin x}{tg^3 3x}$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{5x - 2}{5x + 3}\right)^{\frac{3x}{2}}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{8x - 1}{3x - 2}\right)^{\frac{x}{3}}$;

i) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{5x} - \sqrt{x + 5}\right)$!

27. a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{12x^3 - 8x + 3}{4 - 3x^3}$;

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{7x^3 - 2}{x^2 + 4x}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x - 2}{x^3 + 3}$;

d) $\lim\limits_{x\to6} \dfrac{3x^2 - 20x + 12}{2x^2 - 11x - 6}$;

e) $\lim\limits_{x\to-4} \dfrac{4 - \sqrt{20 + x}}{64 + x^3}$;

f) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x + \sin 5x}{3x}$;

g) $\lim\limits_{x\to0} (2 - \cos x)^{\frac{1}{x}}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x - 3}{2x - 5}\right)^{7x}$;

i) $\lim\limits_{x\to5} \left(\dfrac{7}{x - 5} - \dfrac{5}{x^2 - 25}\right)$!

28. a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^3 - x^2 + 1}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3 - x^2 + 5}{x + 5}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-x}{3+x^2}$;

d) $\lim\limits_{x\to-6}\dfrac{216+x^3}{x^2+2x-24}$;

e) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{8+x}-3}{3x^2-3}$;

f) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5\sin 2x}{3arctg\,4x}$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+1}\right)^{\frac{7x}{2}}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{8+5x}{x-2}\right)^{x-3}$;

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x}-\sqrt{5+x}\right)$!

29. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-x^2-1}{2x^4-x^3+x}$;

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^5-3x+2}{x^4+x-1}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9-x^2}{5+x^3}$;

d) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-5x+2}{x^2-1}$;

e) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^2-x}{\sqrt[4]{x+4}-\sqrt{2}}$;

f) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x}{\sin 3x+\sin x}$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+2}\right)^{\frac{5x-2}{3}}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{2x+4}\right)^{3x}$;

i) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{3}{x^2}\right)$!

30. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^5-4x+2}{7-x-x^5}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2}{x+2}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7-x}{7-x+x^2}$;

d) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x^2-3x+2}$;

e) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{\sqrt{3x}-\sqrt{5x}}$;

f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\frac{\pi}{2}-x}{ctgx}$;

g) $\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{2}{x}}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x-1}{2x+3}\right)^{\frac{x}{2}}$;

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sqrt{x^2+6}-\sqrt{x^2-1}\right)$!

Tipikus változat megoldása

Határozza meg az alábbi határértékeket:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^6-5x^2+3x-10}{4x^3-8x^6}$.

Megoldás.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^6-5x^2+3x-10}{4x^3-8x^6} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^6\left(3-\frac{5}{x^4}+\frac{3}{x^5}-\frac{10}{x^6}\right)}{x^6\left(\frac{4}{x^3}-8\right)} = -\frac{3}{8}.$$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4-5x+9x^3}{x^2+3x-2}$.

Megoldás.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4-5x+9x^3}{x^2+3x-2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3\left(\frac{4}{x^3}-\frac{5}{x^2}+9\right)}{x^2\left(4+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}\right)} =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(\frac{4}{x^3}-\frac{5}{x^2}+9\right)}{4+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}} = \frac{-\infty}{4} = -\infty.$$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-7}{3x^4-x^3+x^2-3} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2\left(1-\frac{7}{x^2}\right)}{x^4\left(3-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^4}\right)} =$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{7}{x^2}}{x^2\left(3-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^4}\right)} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

4. $\lim\limits_{x\to5} \dfrac{x^2-25}{2x^2-12x+10} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to5} \dfrac{(x-5)(x+5)}{2(x-1)(x-5)} =$

$$\lim_{x\to5} \frac{x+5}{2(x-1)} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}.$$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x}-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+3-4)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

6. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\pi^2-x^2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{2sin^2\dfrac{\pi-x}{4}}{(\pi-x)(\pi+x)}=$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{2sin\dfrac{\pi-x}{4}\cdot sin\dfrac{\pi-x}{4}}{4\dfrac{(\pi-x)}{4}(\pi+x)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\pi}\frac{sin\dfrac{\pi-x}{4}}{\pi+x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{0}{2\pi}=0.$$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-2}\right)^{\frac{2x}{5}}=\left[1^{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3x+1}{3x-2}-1\right)^{\frac{2x}{5}}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x+1-3x+2}{3x-2}\right)^{\frac{2x}{5}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{3x-2}\right)^{\frac{2x}{5}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{3x-2}\right)^{\frac{3x-2}{3}\cdot\frac{3}{3x-2}\cdot\frac{2x}{5}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{6x}{15x-10}}=e^{\frac{6}{15}}=e^{\frac{2}{5}}.$$

8. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{4x+3}{2x-5}\right)^{1+7x}=\lim\limits_{x\to-\infty}2^{1+7x}=2^{-\infty}=0.$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\left(\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2-2}\right)\right)=[\infty-\infty]=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2-2}\right)\left(\sqrt{x^2+5}+\sqrt{x^2-2}\right)}{\sqrt{x^2+5}+\sqrt{x^2-2}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(x^2+5-x^2+2\right)}{\sqrt{x^2}+5+\sqrt{x^2-2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{7x}{x\left(\sqrt{1+\dfrac{5}{x^2}}+\sqrt{1-\dfrac{2}{x^2}}\right)}=\frac{7}{2}.$$

3. A függvények folytonossága

Az $y = f(x)$ függvényt, melynek D halmaz az értelmezési tartománya, folytonosnak nevezzük az x_0 pontban a D-ből, ha $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Ez a felvétel ekvivalens az alábbi feltételekkel:

1) $f(x)$ értelmezve van az x_0 pontban;

2) $f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)$ – bal és jobb oldali határértékek léteznek és végesek;

3) $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$;

4) $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$.

Ha ezen feltételek közül valamelyik nem teljesül, akkor az $f(x)$ függvénynek az x_0 pontban szakadása van.

Az $f : M \to R, \quad M \subset R$ függvény az $x = a$ pontjában nem folytonos, de létezik véges jobb és bal oldali határértéke, akkor a szakadás elsőfajú, ha $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A$, akkor a szakadás megszüntethető.

Az $f : M \to R, \quad M \subset R$ függvény az $x = a$ pontjában nem folytonos és $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \pm\infty$ *és* $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \pm\infty$, akkor a szakadás másodfajú.

OM-3.1

1. Határozzák meg az $y = (7x + 5)/(3x^2 - 3)$ függvény folytonosságának tartományát (halmazát)!

2. Adott az alábbi függvény

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & ha \;\; x < 0, \\ \cos x, & ha \;\; 0 \le x < \dfrac{\pi}{2}, \\ x - \dfrac{\pi}{2}, & ha \;\; x \ge \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Állapítsa meg, milyen szakadása van a megadott függvénynek!

3. Állapítsa meg, folytos-e az $y = 2^{\frac{8}{(x+4)}}$ függvény az $x_1 = 4$ és $x_2 = -4$ pontokban!

ÖM-3.1

1. 1) Állapítsa meg, folytonos-e az $f(x) = (6x+12)/(3x+9)$ függvény az $x_1 = -1,\ x_2 = -3$ pontokban! Készítsen vázlatos ábrát!

2) Adott az alábbi függvény

$$f(x) = \begin{cases} 2, & ha\ \ x < 0, \\ 2\cos x, & ha\ \ 0 \le x < \dfrac{\pi}{2}, \\ 4 - x, & ha\ \ x \ge \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Állapítsa meg, milyen szakadása van a megadott függvénynek! Készítsen vázlatos ábrát!

3) Állapítsa meg, folytonos-e az $f(x) = \dfrac{2x-4}{x+4}$ függvény az $x_1 = 0$ és $x_2 = -4$ pontokban! Készítsen vázlatos ábrát!

IM-3.1

1. Állapítsa meg, folytonosak-e az alábbi függvények és készítsen vázlatos ábrát!

1.1. $f(x) = \begin{cases} x+3, & x \le 0, \\ 1, & 0 < x \le 2, \\ x^2 - 2, & x > 2. \end{cases}$ 1.2. $f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0, \\ \sin x, & 0 \le x < \pi, \\ 3, & x \ge \pi. \end{cases}$

1.3. $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x < -1, \\ x^2+1, & -1 \le x \le 2, \\ 2x, & x > 2. \end{cases}$ 1.4. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \le 0, \\ 2^x, & 0 < x \le 2, \\ x+3, & x > 2. \end{cases}$

1.5. $f(x) = \begin{cases} 2-x, & x \le -2, \\ x^3, & -2 < x \le 1, \\ 2, & x > 1. \end{cases}$ 1.6. $f(x) = \begin{cases} 3x+4, & x \le -1, \\ x^2-2, & -1 < x < 2, \\ x, & x \ge 2. \end{cases}$

1.7. $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 1, \\ (x-2)^2, & 1<x\le 3, \\ 6-x, & x>3. \end{cases}$ 1.8. $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<1, \\ x^2+2, & 1\le x\le 2, \\ -2x, & x>2. \end{cases}$

1.9. $f(x)=\begin{cases} x^3, & x<-1, \\ x-1, & -1\le x\le 3, \\ 5-x, & x>3. \end{cases}$ 1.10. $f(x)=\begin{cases} x, & x<-2, \\ 1-x, & -2\le x\le 1, \\ x^3-1, & x>1. \end{cases}$

1.11. $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\le 0, \\ -x^2+3, & 0<x<1, \\ 3x-1, & x\ge 1. \end{cases}$ 1.12. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -2, \\ x^2-4, & -2<x\le 3, \\ 2x, & x>3. \end{cases}$

1.13. $f(x)=\begin{cases} -2, & x<0, \\ \cos x, & 0\le x\le \pi, \\ 1-x, & x>\pi. \end{cases}$ 1.14. $f(x)=\begin{cases} 3, & x<-1, \\ 1-2x, & -1\le x\le 1, \\ \ln x, & x>1. \end{cases}$

1.15. $f(x)=\begin{cases} -2x & x\le 0, \\ x^3, & 0<x\le 2, \\ x+3, & x>2. \end{cases}$ 1.16. $f(x)=\begin{cases} x+4, & x<-1, \\ x^2+2, & -1\le x<1, \\ 4x, & x\ge 1. \end{cases}$

1.17. $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 0, \\ (x+1)^2, & 0<x\le 2, \\ 4-x, & x>2. \end{cases}$ 1.18. $f(x)=\begin{cases} x-2, & x\le -1, \\ x^2-4, & -1<x\le 0, \\ 5-x, & x>0. \end{cases}$

1.19. $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0, \\ (x-1)^2, & 0<x<2, \\ x-3, & x\ge 2. \end{cases}$ 1.20. $f(x)=\begin{cases} -3(x+1), & x\le -1, \\ (x+1)^3, & -1<x<0, \\ 2x, & x\ge 0. \end{cases}$

1.21. $f(x)=\begin{cases} 2x^2, & x\le 0, \\ -x, & 0<x\le 2, \\ x+1, & x>2. \end{cases}$ 1.22. $f(x)=\begin{cases} 2x, & x\le 1, \\ x^2+1, & 1<x\le 3, \\ x+2, & x>2. \end{cases}$

1.23. $f(x)=\begin{cases} x-3, & x<0, \\ x^2-3, & 0\le x\le x2, \\ x+3, & x>2. \end{cases}$ 1.24. $f(x)=\begin{cases} \sqrt{1-x}, & x\le 0, \\ 0, & 0<x\le 3, \\ x-3, & x>3. \end{cases}$

1.25. $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0, \\ 2x^2, & 0<x\le 1, \\ 3+x, & x>1. \end{cases}$ 1.26. $f(x)=\begin{cases} \sin x, & x<0, \\ 2x, & 0\le x\le 3, \\ 0, & x>3. \end{cases}$

1.27. $f(x)=\begin{cases} \cos x,\ x\le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, \quad \dfrac{\pi}{2}<x<\pi, \\ 2, \quad x\ge \pi. \end{cases}$ 1.28. $f(x)=\begin{cases} x-2, & x\le 0, \\ x^2, & 0<x<2, \\ 4(x-1), & x\ge 2. \end{cases}$

1.29. $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0, \\ x^2-1, & 0\le x<2, \\ -x, & x\ge 2. \end{cases}$ 1.30. $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\le 0, \\ 1-x^2, & 0<x\le 2, \\ 2x, & x>2. \end{cases}$

2. Állapítsa meg, folytonosak-e az alábbi függvények a megadott pontokban!

2.1. $f(x)=8^{\frac{2}{x-2}}-1;\ x_1=2,\ x_2=3.$

2.2. $f(x)=\dfrac{2x}{x-3};\ x_1=3,\ x_2=5.$

2.3. $f(x)=5^{\frac{2}{x-3}}+1;\ x_1=2,\ x_2=3.$

2.4. $f(x)=\dfrac{3x}{x^2-1};\ x_1=1,\ x_2=2.$

2.5. $f(x)=\dfrac{7x}{x^2-4};\ x_1=2,\ x_2=-2,\ x_3=3.$

2.6. $f(x)=2^{\frac{3}{x+2}}+1;\ x_1=-2,\ x_2=-1.$

2.7. $f(x)=4^{\frac{5}{x-2}}+2;\ x_1=2,\ x_2=3.$

2.8. $f(x)=3^{\frac{3}{x+1}}-2;\ x_1=-1,\ x_2=0.$

2.9. $f(x)=5^{\frac{4}{x+1}}-1;\ x_1=-1,\ x_2=0.$

2.10. $f(x)=\dfrac{x-3}{x+2};\ x_1=-2,\ x_2=3.$

2.11. $f(x)=\dfrac{x+2}{x-2};\ x_1=2,\ x_2=3.$

2.12. $f(x)=\dfrac{x-3}{x+5};\ x_1=-5,\ x_2=-1.$

2.13. $f(x)=3^{\frac{2}{1-x}+1};\ x_1=1,\ x_2=2.$

2.14. $f(x)=4^{\frac{3}{3-x}}$; $x_1=-3,\ x_2=0.$

2.15. $f(x)=6^{\frac{3}{x-4}}-2$; $x_1=4,\ x_2=5.$

2.16. $f(x)=\dfrac{x-2}{x+1}$; $x_1=-1,\ x_2=1.$

2.17. $f(x)=2^{\frac{1}{x-3}}+3$; $x_1=3,\ x_2=4.$

2.18. $f(x)=5^{\frac{2}{2-x}-1}$; $x_1=2,\ x_2=0.$

2.19. $f(x)=\dfrac{x+7}{x-1}$; $x_1=1,\ x_2=3.$

2.20. $f(x)=\dfrac{x-5}{x+3}$; $x_1=-3,\ x_2=-1.$

2.21. $f(x)=3^{\frac{1}{2-x}}$; $x_1=2,\ x_2=3.$

2.22. $f(x)=9^{\frac{1}{5-x}}$; $x_1=5,\ x_2=6.$

2.23. $f(x)=2^{\frac{3}{x-5}}$; $x_1=5,\ x_2=6.$

2.24. $f(x)=5^{\frac{1}{x-4}}-2$; $x_1=3,\ x_2=4.$

2.25. $f(x)=6^{\frac{1}{x-3}}+1$; $x_1=3,\ x_2=4.$

2.26. $f(x)=7^{\frac{1}{5-x}}+1$; $x_1=4,\ x_2=5.$

2.27. $f(x)=\dfrac{x-3}{x+4}$; $x_1=-5,\ x_2=-4.$

2.28. $f(x)=\dfrac{x+5}{x-2}$; $x_1=3,\ x_2=2.$

2.29. $f(x)=5^{\frac{2}{x-1}+3}$; $x_1=1,\ x_2=2.$

2.30. $f(x)=2^{\frac{5}{1-x}}$; $x_1=0,\ x_2=1.$

Tipikus változat megoldása

1. Állapítsa meg, folytonos-e az alábbi függvény és készítsen vázlatos ábrát!

$$f(x)=\begin{cases} -x^2, & x\le 0, \\ (x-1)^2-1, & 0<x<2, \\ 3-x, & x\ge 2. \end{cases}$$

Megoldás.

Az $f(x)$ függvény folytonos a $(-\infty;0)$, $(0;2)$ és $(2;+\infty)$ intervallumokon, mivel ezeken elemi függvényként szerepel. Tehát, a szakadás csak az x_1 és x_2 pontokban lehetséges.

1) Az $x_1=0$ pont esetére kapjuk:

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0}\left(-x^2\right)=0,\ \lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}\left((x-1)^2-1\right)=0,$$

$f(0)=-x^2\big|_{x=0}=0,$ vagyis az $f(x)$ függvény folytonos az $x_1=0$ pontban.

2) Az $x_2=2$ pont esetére kapjuk:

$$\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2-0}\left((x-1)^2-1\right)=0,\ \lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{x\to 2+0}(3-x)=1,\ f(2)=(3-x)\big|_{x=2}=1,$$

vagyis az $x_2=2$ pontban az $f(x)$ függvénynek elsőfajú nem megszüntethető szakadása van. A függvény grafikonja az 3.1 ábrán van ábrázolva.

2. Állapítsa meg, folytonos-e az $f(x)=4^{\frac{1}{x-2}}+3$ függvény az $x_1=2$ és $x_2=3$ pontokban!

Megoldás.

Az $x_1=2$ pont esetére:

$$\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2-0}\left(4^{\frac{1}{x-2}}+3\right)=0+3,$$

$$\lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{x\to 2+0}\left(4^{\frac{1}{x-2}}+3\right)=\infty,$$

vagyis $x_1=2$ pontban az $f(x)$ függvénynek másodfajú szakadása van.

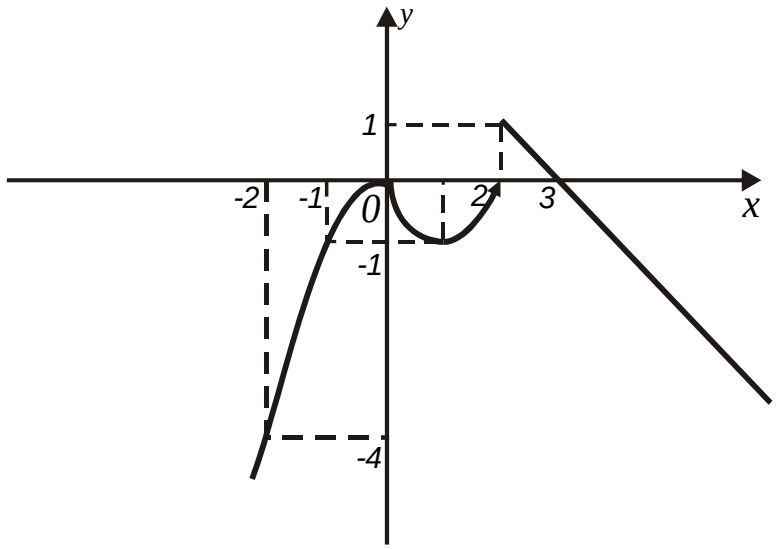
Az $x_2=3$ pont esetére:

$$\lim_{x\to 3-0} f(x)=\lim_{x\to 3-0}\left(4^{\frac{1}{x-2}}+3\right)=7,$$

$$\lim_{x\to 3+0} f(x) = \lim_{x\to 3+0}\left(4^{\frac{1}{x-2}} + 3\right) = 7,$$

$$f(3) = 4^{\frac{1}{3-2}} + 3 = 7.$$

Tehát, az $x_2 = 3$ pontban az $f(x)$ függvény folytonos.



3.1. ábra

4. A deriváltfüggvény

Legyen $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ – az $y = f(x)$ függvény növekménye az x_0 pontban, mely a $\Delta x = x - x_0$ argumentum növekményének felel meg. Az $y = f(x)$ függvény x_0 ponthoz tartozó deriváltjának az alábbi határértéket nevezzük

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Elemi függvények deriváltfüggvényei

#	$y = f(x)$	$y' = f'(x)$
1	$C\ (const)$	0
2	$x^{\alpha}\ (\alpha \neq 0)$	$\alpha x^{\alpha - 1}$
3	$a^x\ (a > 0, a \neq 1)$	$a^x \ln a$
4	e^x	e^x
5	$\log_a x\ (a > 0, a \neq 1)$	$\log_a e \cdot \frac{1}{x}$
6	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
7	$\sin x$	$\cos x$
8	$\cos x$	$-\sin x$
9	tgx	$\frac{1}{\cos^2 x}$
10	$ctgx$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
11	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
12	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
13	$arctgx$	$\frac{1}{1 + x^2}$

14	$arcctgx$	$-\frac{1}{1+x^2}$
15	shx	chx
16	chx	shx
17	thx	$\frac{1}{ch^2x}$
18	$cthx$	$-\frac{1}{sh^2x}$

Deriválási szabályok

Ha az $u(x),\ v(x)-$ két deriválható függvény, akkor:

1. $(u+v)' = u' + v';$
2. $(Cu)' = Cu'\ (C = const);$
3. $(uv)' = u'v + uv';$
4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2};$

5. Ha az $y = f(x)$ függvény deriválható az x_0 pontban és a $z = g(y)$ függvény deriválható az $y_0 = f(x_0),$ akkor az összetett $z = g(f(x))$ függvény is deriválható az x_0 pontban, melynek deriváltja egyenlő $z'(x_0) = g'(y_0)\cdot f'(x_0)$ (összetett függvény deriválási szabálya).

Legyen a függvény paraméteres alakban megadva

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} t \in (\alpha, \beta).$$

Ha teljesül, hogy az $x = \varphi(t)$ függvény az (α, β) intervallumon invertálható (vagyis létezik inverzfüggvénye) és $t = \varphi^{-1}(x),$ akkor az y'_x derivált kiszámítható az alábbi képlettel

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

OM 4.1

1. A definíció alapján határozza meg az $y = 2x^3+3x^2-x+1$ függvény deriváltját!
2. Deriválja az alábbi függvényeket

a) $y = x^5 tg\,7x;$ b) $y = e^{x^2} sin\,5x;$ c) $y = \sqrt[3]{x^3 - cos^4 x};$

d) $y = 3^{sin^2 5x};$ e) $y = x cos^2 x \cdot e^{x^3};$ f) $y = \dfrac{5x^4 - 1}{e^{2x}};$

g) $y = \sqrt[4]{\dfrac{3x^2 - 1}{3x^2 + 1}};$ h) $y = 4^{\frac{x}{ln\,x}};$ i) $y = sh^3\left(x^{-\sqrt{x^2+2x}}\right);$

j) $y = ch^5 arctg\sqrt{2 + x^2};$ k) $y = 5\log_2^3\left(\dfrac{e^{x^2}}{\arccos x^3}\right)!$

3. Logaritmikus deriválási szabály alapján deriválja az alábbi függvényeket

a) $y = (cos\,4x)^{sin 3x};$ b) $y = \left(x^2 + 1\right)^{tg 5x};$ c) $y = (ln\,2x)^{x^2};$

d) $y = \dfrac{\sqrt[5]{x+3}}{(x-2)^3(x-7)}!$

4. Deriválja az alábbi $y(x)$ paraméteres alakban megadott függvényeket

a) $\begin{cases} x = t^2 + t + 1, \\ y = t^3 + t^2 - 1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t\,! \end{cases}$

ÖM-4.1

Deriválja az alábbi függvényeket:

1. a) $y = x^2 tg^3 5x;$ b) $y = \sqrt{\dfrac{cos^2 x - 1}{sin\,2x - 1}};$

c) $y = \left(3^{cos 2x} + sin\,2x\right)^4;$ d) $y = x cos^2 x \cdot e^{x^3};$

e) $y = (ctg\,2x)^{x^3};$ f) $e^{x^2 y^2} - x^4 + y^4 = 5;$

g) $\begin{cases} x = t^2 - 2t, \\ y = t^3 + t^2 + 1! \end{cases}$

2. a) $y = \dfrac{x^3}{e^{sin 3x}};$ b) $y = \left(sin^5 x + ln^2 x\right)^3;$

c) $y = 3^{x^4 - sin^3 x}$; d) $y = xtg^2 x \cdot sin 5x$;

e) $y = (sin 4x)^{cos 5x}$; f) $y^2 + x^2 - sin(x^2 y^2) = 5$;

g) $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = (2t+1)\cos t \end{cases}$!

IM-4.1

Deriválja az alábbi függvényeket:

1.

a) $y = 3\sqrt{x} + \frac{7}{x} - 4x^3 + \frac{2}{x^4}$; b) $y = \sqrt[3]{3x^4 + 3x - 2} + \frac{3}{(x-2)^2}$;

c) $y = cos^5 3x \cdot sin 4x^5$; d) $y = 4(x-2)^7 \cdot ln(x^2 - x + 2)$;

e) $y = (x-3)^6 \cdot sh^2 3x$; f) $y = \frac{e^{arccos^2 x}}{\sqrt{x+5}}$;

g) $y = \frac{7arctg(2x+1)}{(x-4)^2}$; j) $y = \sqrt{\frac{x-5}{x+5} log_3(x - 2x^2)}$;

k) $y = (th 3x)^{arcsin x}$; l) $y = \frac{\sqrt{x+5}(x-3)^4}{(x+2)^3}$;

m) $sin\, y = xy^2 + 5$; n) $\begin{cases} x = 6t^2 - 4, \\ y = 3t^5 \end{cases}$!

2.

a) $y = \frac{7}{x^5} - \frac{3}{x} + 5\sqrt[4]{x^3} - 2x^2$; b) $y = \sqrt[4]{(x-5)^3} - \frac{2}{3x^2 + x - 4}$;

c) $y = sin^2 2x \cdot tg(5x+2)^3$; d) $y = 2^{-x} \cdot arctg^2 5x$;

e) $y = ch^3(2x+5) \cdot \sqrt{3x-1}$; f) $y = \frac{\sqrt{1 + x - x^2}}{e^x}$;

g) $y = \frac{5lg(3x^2 - 1)}{(x-3)^3}$; h) $y = \sqrt[3]{\frac{3x+1}{3x-1}} \cdot lg(4x+7)$;

i) $y = (cos(x+2))^{ln x}$; j) $y = \frac{(x+3)^5 (x-2)^3}{\sqrt[5]{(x+7)^2}}$;

k) $x^3 + y^3 = 5x;$ l) $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \ln t\,! \end{cases}$

3.

a) $y = 5x^7 - \frac{2}{x^5} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x};$ b) $y = \frac{7}{(2x^2 - 3x + 1)^2} - \sqrt[3]{(x-3)^2};$

c) $y = ctg^4 7x \cdot arcsin 8x^2;$ d) $y = 2^{\cos x} \cdot arcctg^4 x;$

e) $y = th^5 2x \cdot ln^2 2x;$ f) $y = \frac{2e^{-2x}}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}};$

g) $y = \frac{5arctg 2x}{(2x-1)^2};$ h) $y = \sqrt[4]{\frac{7x-2}{7x+2}} \cdot cos(3x-5);$

i) $y = (shx)^{\sqrt{x}};$ j) $y = \frac{(x-4)^2\sqrt{x-5}}{(3x+1)^6};$

k) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{7};$ l) $\begin{cases} x = \ln^2 t, \\ y = t + \ln t\,! \end{cases}$

4.

a) $y = 3\sqrt[3]{x} + \frac{7}{x^2} - \frac{8}{x} + 9x^4;$ b) $y = \frac{8}{(x-4)^3} + \sqrt[5]{7 - 2x - x^2};$

c) $y = tg 7x^3 \cdot arccos^2 3x;$ d) $y = ln(2x-5) \cdot ctg 3x^2;$

e) $y = cth^4(7x-1) \cdot (x-2)^4;$ f) $y = \frac{(3x+1)^2}{4e^{-x^2}};$

g) $y = \frac{ln(7x+5)}{(3-x)^5};$ h) $y = \sqrt[5]{\frac{5x+1}{5x-1}} \cdot ln(3x-4);$

i) $y = (ln(x+2))^{cos\sqrt{x}};$ j) $y = \frac{\sqrt[3]{2x+1}(x-5)^2}{(2x+3)^5};$

k) $y^2 = \frac{x-y}{x+y};$ l) $\begin{cases} x = te^t, \\ y = \frac{t}{e^t}\,! \end{cases}$

5.

a) $y = \frac{7}{x^2} - \frac{4}{x} + \sqrt[4]{x^3} - 5x^6;$ b) $y = \sqrt[6]{(3-x)^5} - \frac{8}{(x^2 - 3x + 2)^3};$

c) $y = arcctg^4(7x-3) \cdot sin 2x^3;$ d) $y = e^{tgx} \cdot cos^4 x;$

e) $y = e^{-3x^2} \cdot chx^3;$ f) $y = \dfrac{e^{3x}}{(3+5x)^2};$

g) $y = \dfrac{2\,log_3(3x-1)}{(x-7)^4};$ h) $y = \sqrt[6]{\dfrac{2-x}{2+x}} \cdot cos(3x-5);$

i) $y = (log_2 3x)^{cthx};$ j) $y = \dfrac{(9x-1)^6(x-7)^5}{\sqrt[3]{(3x-1)^6}};$

k) $cos\, y = x^3 y + 6;$ l) $\begin{cases} x = e^{-3t}, \\ y = e^{8t} \end{cases}$!

6.

a) $y = 5x^3 - \dfrac{8}{x^2} + 6\sqrt{x} - \dfrac{1}{x};$ b) $y = \dfrac{9}{7-x+2x^2} - \sqrt[3]{(x+5)^2};$

c) $y = sin^8 3x \cdot cos^3 4x^2;$ d) $y = 3(x-1)^5 \cdot log_3 2x;$

e) $y = (4x-2)^5 \cdot sh^6 2x^3;$ f) $y = \dfrac{(3x-2)^3}{3e^{4x}};$

g) $y = \dfrac{arcsin(x+1)}{(x-2)^3};$ h) $y = \sqrt[7]{\dfrac{x-9}{x+9}} \cdot arctg\sqrt{x+1};$

i) $y = \left(\dfrac{1}{x}\right)^{cos^2 x};$ j) $y = \dfrac{\sqrt[5]{4x-2}}{(3x+1)^6(x-2)^5};$

k) $ctg^2(x+y) = 2x;$ l) $\begin{cases} x = \sqrt[3]{(t-1)^2}, \\ y = \sqrt{t-1} \end{cases}$!

7.

a) $y = 2\sqrt{x^3} - \dfrac{4}{x^2} + \sqrt[5]{x^2} + \dfrac{7}{x};$ b) $y = \sqrt[4]{(7-2x-x^2)^3} - \dfrac{4}{(x-3)^5};$

c) $y = tg\sqrt{x} \cdot arcsin^2 5x;$ d) $y = \sqrt{e^{x+2}} \cdot arcsin\sqrt{x};$

e) $y = lg^2(x+3) \cdot cth^3 2x;$ f) $y = \dfrac{\sqrt{5x^2 - x + 2}}{e^{x^3}};$

g) $y = \dfrac{3\,log_5(2x+4)}{(x-2)^2};$ h) $y = \sqrt[8]{\dfrac{4x-3}{4x+3}} \cdot ln(5x-1);$

i) $y = \left(\sqrt[3]{x^2}\right)^{arcsin\sqrt{x}};$ j) $y = \dfrac{\sqrt[8]{2x+5}}{(7x-2)^6(x-4)^3};$

k) $x^2y^2 + x = 5y;$ l) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t+1}, \\ y = \left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2 \end{cases}$!

8.

a) $y = 8x^2 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{9}{x} - \dfrac{2}{x^2};$ b) $y = \sqrt[3]{(9-x)^2} - \dfrac{2}{4x^2 - x + 5};$

c) $y = cos^5 7x \cdot arcsin 2x^3;$ d) $y = e^{-2x} \cdot arctg^3 4x;$

e) $y = tg^4(x-2) \cdot ln^2 2x;$ f) $y = \dfrac{e^{sin\,x}}{cos\,2x};$

g) $y = \dfrac{3arcsin\sqrt{x}}{(x+2)^6};$ h) $y = \sqrt[9]{\dfrac{x-9}{x+9}} \cdot sin(2x-5);$

i) $y = (ln\,2x)^{sh3x};$ j) $y = \dfrac{(3x-4)^9(x-1)^4}{\sqrt[7]{(3x-1)^6}};$

k) $x^4 + x^2y^2 + y = 4;$ l) $\begin{cases} x = 5\sin^3 t, \\ y = 3\cos^3 t \end{cases}$!

9.

a) $y = 4\sqrt{x^5} + \dfrac{10}{x^3} - \dfrac{8}{x} + 4x^5;$ b) $y = \sqrt[7]{(2-x)^3} + \dfrac{4}{(3-x+x^2)^2};$

c) $y = arctg^4(2x+1) \cdot cos\,4x^3;$ d) $y = ln(x+4) \cdot arcctg^2 3x;$

e) $y = arcsin^2 7x \cdot sh^6 x;$ f) $y = \dfrac{cos\,5x}{e^{tg\,5x}};$

g) $y = y = \dfrac{4ln^2(x+2)}{(x+2)^3};$ h) $y = \sqrt{\dfrac{4-x}{4+x}} \cdot log_2(3x^2 - 4);$

i) $y = (ch3x)^{\frac{1}{x}};$ j) $y = \dfrac{\sqrt[6]{(3x+4)^5}}{(x-5)^3(x+3)^2};$

k) $y^2 = x + ln\dfrac{y}{x};$ l) $\begin{cases} x = \dfrac{\ln t}{t}, \\ y = t^2 \ln t \end{cases}$!

10.

a) $y = 12\sqrt[3]{x^2} - \dfrac{7}{x^2} + 4x - \dfrac{1}{x^3};$ b) $y = \dfrac{7}{(5-x)^5} + \sqrt[4]{2 - 3x + 4x^2};$

c) $y = arccos\, 8x^3 \cdot sin^3 3x;$ d) $y = 5^{x^2} \cdot sin(5x^2 - 3);$

e) $y = arctg\sqrt{x} \cdot ch^3 3x;$ f) $y = \dfrac{e^{sh2x}}{x^2 - 4};$

g) $y = \dfrac{ln(7x-3)}{(x+1)^5};$ h) $y = \sqrt[3]{\dfrac{5x-9}{5x+9}} \cdot sin(4-x);$

i) $y = (lg(8x+1))^{tg5x};$ j) $y = \dfrac{(4x-1)^7(3x+1)^2}{\sqrt[5]{(x+7)^4}};$

k) $xy^2 - y^3 = 4x - 5;$ l) $\begin{cases} x = \arccos t, \\ y = \sqrt{1-t^2}\ ! \end{cases}$

11.

a) $y = \dfrac{12}{\sqrt{x}} - \dfrac{4}{x^2} + 5x^4 - \dfrac{9}{x};$ b) $y = \dfrac{8}{(3x^2 - x + 5)^3} - \sqrt[5]{(x-1)^3};$

c) $y = arccos\sqrt{x+5} \cdot sin^3 2x;$ d) $y = 7(5-x)^5 log_2 4x;$

e) $y = th^2(x+2) \cdot cos(2x+3)^3;$ f) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 5x + 1}}{e^{-cos 2x}};$

g) $y = \dfrac{4log_4(2x+3)}{(x-1)^5};$ h) $y = \sqrt[4]{\dfrac{7x-1}{7x+1}} \cdot ln(3x^5 - 1);$

i) $y = (cth2x)^{\sqrt{x+1}};$ j) $y = \dfrac{\sqrt[4]{5x+1}}{(x-3)^5(x+2)^4};$

k) $xy - 6 = cos\, y;$ l) $\begin{cases} x = \sin 2t, \\ y = \cos^2 t\ ! \end{cases}$

12.

a) $y = 4\sqrt[4]{x^5} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} + 2x^3 - \dfrac{3}{x^3};$ b) $y = \sqrt[6]{(x-4)^5} - \dfrac{2}{(7x - x^2)^3};$

c) $y = arcctg^3 2x \cdot cos(3x+1);$ d) $y = arctg^4 7x \cdot ln(3x^2 - 4x);$

e) $y = cth^3(3x-1) \cdot tg(2x)^3;$ f) $y = \dfrac{cos\, 5x}{e^{tg5x}};$

g) $y = \dfrac{3lg(4x+7)}{(2x-1)^2};$ h) $y = \sqrt[5]{\dfrac{x+3}{x-3}} \cdot cos(2x^2 - 5);$

i) $y=\left(ln\frac{1}{x}\right)^{x^2}$; j) $y=\frac{(2x+1)^9(3x-2)^8}{\sqrt[5]{(x-4)^3}}$;

k) $3y=7+xy^3$; l) $\begin{cases} x=e^{3t}, \\ y=e^{-3t} \end{cases}$!

13.

a) $y=2x^5-\sqrt[5]{x^4}+\frac{8}{\sqrt{x}}-\frac{2}{x^3}$; b) $y=\frac{9}{(6-x)^2}-\sqrt[4]{3x^2-4x+5}$;

c) $y=\sqrt{arcsin\,x}\cdot tg^3(2x+3)$; d) $y=7^{tg3x}\cdot cos^2 3x$;

e) $y=e^{shx}\cdot ln(7x^2+5x-1)$; f) $y=\frac{\sqrt{(x-2)^3}}{e^{3x^2}}$;

g) $y=\frac{2ln(3x^2-4)}{(x-5)^3}$; h) $y=\sqrt[6]{\frac{x-1}{x+1}}\cdot arcsin\sqrt{x}$;

i) $y=(log_3(2x+1))^{tg5x}$; j) $y=\frac{(9x+4)^{12}(3x-1)^3}{\sqrt[7]{(x-7)^6}}$;

k) $tgy=4y-5x$; l) $\begin{cases} x=3(t-\sin t), \\ y=3(1-\cos t) \end{cases}$!

14.

a) $y=7\sqrt[7]{x^5}-4x^3+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}$; b) $y=\frac{7}{(5-x^3)^2}+\sqrt[3]{x^2-x+1}$;

c) $y=tg^2(9x+1)\cdot sin\,7x^3$; d) $y=ln^6 sin\,x\cdot cos^2 x$;

e) $y=5^{thx}\cdot e^{cthx}$; f) $y=\frac{e^{thx}}{(2x+3)^2}$;

g) $y=\frac{6arccos(x-3)}{(x-2)^2}$; h) $y=\sqrt[7]{\frac{3x-2}{3x+2}}\cdot arctg\sqrt{x+1}$;

i) $y=(tgx)^{th2x}$; j) $y=\frac{\sqrt[8]{2x+7}}{(x-6)^6(x+3)^2}$;

k) $y=7x-ctgy$; l) $\begin{cases} x=3(\sin t-t\cos t), \\ y=3(\cos t+t\sin t) \end{cases}$!

15.

a) $y=\frac{1}{\sqrt{x}}-4\sqrt{x^3}+12x^3-\frac{4}{x}$; b) $y=\sqrt{(7-x)^3}-\frac{2}{(3x^2-x-1)^2}$;

c) $y=ctg^5 2x\cdot arcsin^4 3x^2$; d) $y=lg^2(2x+3)\cdot sin 5x^2$;

e) $y=log_2 shx\cdot arcsin\sqrt{x}$; f) $y=\frac{e^{-2x}}{\sqrt{4x+3}}$;

g) $y=\frac{lg(x^2-4)}{(x-2)^5}$; h) $y=\sqrt[8]{\frac{5-x}{5+x}}\cdot ln(2x^3-3)$;

i) $y=(x^2+1)^{\sqrt{x}}$; j) $y=\frac{(x-3)^3(x+5)^7}{\sqrt[9]{(x-4)^8}}$;

k) $sin^2(3x+y^2)=5$; l) $\begin{cases} x=arctgx, \\ y=\ln(1+t^2)! \end{cases}$

16.

a) $y=2\sqrt[4]{x^3}+\frac{7}{x^2}-\frac{8}{x}+3x^2$; b) $y=\sqrt[4]{(x-7)^3}-\frac{9}{(4-x-x^2)^3}$;

c) $y=arctg\sqrt{x+2}\cdot tg^4 7x^2$; d) $y=arcsin\sqrt{x+2}\cdot e^{2x}$;

e) $y=arccos 5x\cdot ch^2 3x$; f) $y=\frac{e^{sin^2 x}}{\sqrt{2x^2-3}}$;

g) $y=\frac{arcsin\sqrt{x-2}}{(x-3)^4}$; h) $y=\sqrt[9]{\frac{7+x}{7-x}}\cdot log_4(x-2)$;

i) $y=(sh2x)^{log_2 3x}$; j) $y=\frac{\sqrt[10]{(x+8)^3}}{(x-2)^4(4-x)^6}$;

k) $e^y=4x-7y$; l) $\begin{cases} x=\arcsin t, \\ y=\sqrt{1-t^2}\ ! \end{cases}$

17.

a) $y=2\sqrt{x^3}-\frac{4}{x^2}+7x^5-\frac{3}{\sqrt{x}}$; b) $y=\frac{11}{3x^2-2x-9}-\sqrt[5]{(x-8)^2}$;

c) $y=cos(2x+5)\cdot\sqrt{tg 3x^2}$; d) $y=3^{-x^2}tg^3 2x$;

e) $y=4(3x-1)^2 cth^3 x$; f) $y=\frac{5e^{x^2}}{(7-x)^3}$;

g) $y=\dfrac{3log_5\left(x^2-3\right)}{\left(x-1\right)^3}$; h) $y=\sqrt{\dfrac{3x-7}{3x+7}\cdot sin\left(3x^2+5\right)}$;

i) $y=\left(arctg\,2x\right)^{sh3x}$; j) $y=\dfrac{\left(x-1\right)^2\left(3x+2\right)^5}{\sqrt[3]{\left(x-1\right)^2}}$;

k) $y^2+x^2=sin\,y$; l) $\begin{cases} x=5\cos t, \\ y=4\sin t\,! \end{cases}$

18.

a) $y=9\sqrt[3]{x^5}+\dfrac{5}{x^2}-7x^3+\dfrac{8}{x}$; b) $y=\sqrt[3]{\left(9+x-x^2\right)^2}-\dfrac{5}{\left(x+5\right)^5}$;

c) $y=ctg\,5x^4\cdot sin^3 3x$; d) $y=2^{x^2-4}\cdot arcsin^2\sqrt{x}$;

e) $y=\left(7-x\right)^3\cdot sh^5 2x$; f) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x+3}}{e^{-3x}}$;

g) $y=\dfrac{sin\left(5x+1\right)}{\left(x-4\right)^6}$; h) $y=\sqrt[3]{\dfrac{2x+4}{2x-4}}\cdot cos\left(7-x^2\right)$;

i) $y=\left(ch2x\right)^{3x}$; j) $y=\dfrac{\sqrt[4]{\left(x+4\right)^3}}{\left(2x-3\right)^9\left(x+1\right)^7}$;

k) $sin\,y=7x+3y$; l) $x=\begin{cases} x=5\cos^2 t, \\ y=3\sin^2 t\,! \end{cases}$

19.

a) $y=\dfrac{3}{\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{2}{x^3}-3x^4+\dfrac{1}{x}$; b) $y=\sqrt[6]{\left(x^2-3x+2\right)}-\dfrac{8}{\left(x+5\right)^3}$;

c) $y=arcsin\sqrt{x}\cdot ctg^3 2x$; d) $y=5^{cos^2 x}arctg^3 x$;

e) $y=7^{ch2x}\,ln\,2x$; f) $y=\dfrac{2e^{tg3x}}{\left(3x-1\right)^2}$;

g) $y=\dfrac{3log_2\left(x+3\right)}{tg\,3x}$; h) $y=\sqrt[4]{\dfrac{x+3}{x-3}}\cdot log_3\left(2x+9\right)$;

i) $y=\left(cth\sqrt{x}\right)^{cos\left(x+5\right)}$; j) $y=\dfrac{\left(7x-1\right)^2\left(x+9\right)^5}{\sqrt[5]{\left(x-1\right)^4}}$;

k) $y=e^y+4x$; l) $\begin{cases} x=e^t\cos t, \\ y=e^t\sin t\,! \end{cases}$

20.

a) $y = 7\sqrt[5]{x^3} + \frac{4}{x} - \frac{9}{x^2} + 8x^2;$ b) $y = \frac{7}{\left(x^2 - x + 1\right)^3} - \sqrt[5]{(4-x)^3};$

c) $y = \sqrt{tg\,7x^2} \cdot cos\,2x^3;$ d) $y = sin^5\left(3x^2 - 1\right) \cdot cos\,3x^2;$

e) $y = arctg\sqrt{x} \cdot th^5(x+1);$ f) $y = \frac{ln^2(2x+1)}{x^2 + x + 3};$

g) $y = \frac{tg(2x-5)}{ln(2x-1)};$ h) $y = \sqrt[5]{\frac{5x-1}{5x+1}} \cdot lg\left(4x^2 - 3\right);$

i) $y = (sh5x)^{arctg2x};$ j) $y = \frac{\sqrt[6]{(x-1)^5}}{(x+2)^6(x-3)^8};$

k) $ln\,y = \frac{y}{x} - 7;$ l) $\begin{cases} x = t^4, \\ y = \ln t\,! \end{cases}$

21.

a) $y = \sqrt[6]{x^5} - 6x^2 + \frac{3}{x^3} - \frac{2}{x};$ b) $y = \sqrt[9]{(x-3)^2} + \frac{2}{\left(x - 3x^2\right)^7};$

c) $y = tg^5(3x-1) \cdot ctg\,7x^2;$ d) $y = log_2(5x+1) \cdot sin^4 3x^5;$

e) $y = arctg^6 3x \cdot sh(2x+3);$ f) $y = \frac{e^{4x^2}}{ln^2 x};$

g) $y = \frac{2(x-3)^3}{ln^2 2x};$ h) $y = \sqrt[6]{\frac{6-x}{6+x}} \cdot arccos(2x-1);$

i) $y = (lg\,7x)^{x^3};$ j) $y = \frac{(x+1)^5(x-1)^4}{\sqrt[7]{(x-3)^6}};$

k) $tgy = 3x + 5y;$ l) $\begin{cases} x = 4t + 2t^2, \\ y = 5t^3 - 3t^2\,! \end{cases}$

22.

a) $y = \frac{10}{x^2} - 8\sqrt[4]{x^3} + \frac{3}{x} - 9x;$ b) $y = \sqrt[3]{2x^2 - x + 5} + \frac{3}{(2-x)^5};$

c) $y = sin^4 5x \cdot arcsin\sqrt{8x};$ d) $y = cos^4(4x-2) \cdot e^{x^3};$

e) $y = (4x-3)^5 sh(4x-1);$ f) $y = \frac{\sqrt{7 - x - 2x^2}}{e^{-2x}};$

g) $y=\dfrac{7\,ln\left(x^2-1\right)}{sin^2\left(x+1\right)}$;

h) $y=\sqrt[7]{\dfrac{x+2}{x-2}}\cdot tg\left(5x^2-3\right)$;

i) $y=\left(\sqrt{x+3}\right)^{arcsin5x}$;

j) $y=\dfrac{\sqrt[8]{\left(x+5\right)^3}}{\left(3x-2\right)^3\left(x+3\right)^9}$;

k) $xy=ctgy$;

l) $\begin{cases} x=\dfrac{\ln t}{t}, \\ y=t\ln t\,! \end{cases}$

23.

a) $y=4\sqrt{x}-\dfrac{7}{x^5}+\dfrac{4}{x}-8x^9$;

b) $y=\dfrac{7}{\left(x-5\right)^6}-\sqrt[7]{x^2-3x+4}$;

c) $y=\left(7x-4\right)^5 arcsin\sqrt{x}$;

d) $y=cos^3\left(5x-7\right)\cdot lg\,3x^2$;

e) $y=e^{th^2x}ch^3x$;

f) $y=\dfrac{e^{tg\,3x}}{\left(x+1\right)^2}$;

g) $y=\dfrac{tg\left(3x+1\right)}{4ln^2\left(x-3\right)}$;

h) $y=\sqrt[8]{\dfrac{9-x}{9+x}}\cdot ln\left(3x^5-4\right)$;

i) $y=\left(arctg\,3x\right)^{shx}$;

j) $y=\dfrac{\left(x-3\right)^4\left(x+9\right)^7}{\sqrt[9]{\left(x-5\right)^5}}$;

k) $y^2-x=cos\,y$;

l) $\begin{cases} x=\dfrac{2t}{1+t^3}, \\ y=\dfrac{t^2}{1+t^2}\,! \end{cases}$

24.

a) $y=7\sqrt[7]{x^5}+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{7}{x}+9x^3$;

b) $y=\dfrac{1}{\left(3-x-2x^2\right)^3}-\sqrt[3]{\left(x-2\right)^2}$;

c) $y=arctg^3 8x\cdot cos\,2x^4$;

d) $y=5^{-x^3}\,sin^2 3x^3$;

e) $y=2^{cth3x}sh^2x$;

f) $y=\dfrac{e^{chx}}{2x-4}$;

g) $y=\dfrac{ln^2\left(x+2\right)}{\left(x-5\right)^5}$;

h) $y=\sqrt[9]{\dfrac{2x+7}{2x-7}}\cdot cos\left(3x^2-4\right)$;

i) $y=\left(th\dfrac{1}{x}\right)^{\sqrt{x+3}}$;

j) $y=\dfrac{\sqrt{x-7}}{\left(x+1\right)^9\left(x-1\right)}$;

k) $3x + \sin y = 5y;$ l) $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 - 1}, \\ y = \dfrac{t+1}{\sqrt{t^2-1}} \end{cases}$!

25.

a) $y = 12\sqrt[3]{x^2} - \dfrac{3}{\sqrt{x}} + \dfrac{5}{x} - 3x^5;$ b) $y = \sqrt[9]{(7-x)^7} + \dfrac{6}{(3x^2 - 11x)^5};$

c) $y = \sqrt{\arccos 3x} \cdot \sin^5 2x;$ d) $y = arctg^2 \sqrt{x} \cdot \cos(1+x)^2;$

e) $y = \arcsin\sqrt{x} \cdot sh^4 \sqrt{x};$ f) $y = \dfrac{e^{-ctg\,2x}}{\cos^2 2x};$

g) $y = \dfrac{5\ln(7x+2)}{\cos^2(7x-1)};$ h) $y = \sqrt{\dfrac{5x+3}{5x-3}} \cdot \log_5(7 - x^2);$

i) $y = (\ln(7x+4))^{tgx};$ j) $y = \dfrac{(x-8)^{10}(x+3)^7}{\sqrt[3]{(x+1)^2}};$

k) $y^4 = 25x - 4;$ l) $\begin{cases} x = e^{-2t}, \\ y = e^{6t} \end{cases}$!

26.

a) $y = 15\sqrt[5]{x} + 7x^3 - \dfrac{8}{x^3} + \dfrac{4}{x};$ b) $y = \sqrt{2x^2 - 4x + 5} - \dfrac{9}{(4-x)^5};$

c) $y = \arcsin^4 5x \cdot tg(3x+4);$ d) $y = \log_5 3x^5 \cdot \sin^3 4x;$

e) $y = \arccos^3 x \cdot ch^2 x;$ f) $y = \dfrac{\sqrt{7x-1}}{e^{\sin 5x}};$

g) $y = \dfrac{4\cos^3(x-3)}{\ln^2(x-3)};$ h) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x+10}{x-10}} \cdot \arcsin 3x;$

i) $y = (lg(8x+3))^{chx};$ j) $y = \dfrac{\sqrt[4]{(x+7)^3}}{(2x+3)^3(x-1)^5};$

k) $arcctgy = 4x + 5y;$ l) $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[5]{t} \end{cases}$!

27.

a) $y = \dfrac{3}{\sqrt[6]{x^5}} - 4x^5 + \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{9}{x};$ b) $y = \dfrac{4}{(3x^2 - x + 3)^2} - \sqrt[5]{(x-2)^3};$

c) $y=\sqrt{arctgx}\cdot sin^5 2x^3;$ d) $y=3(1-x)^4 ln^3 2x;$

e) $y=arcctg\,\frac{1}{x}\cdot th^2 x;$ f) $y=\frac{e^{5x}}{\sqrt[3]{5x-2}};$

g) $y=\frac{ln^2 2x}{(x-2)^3};$ h) $y=\sqrt[4]{\frac{2x+3}{2x-3}}\cdot arccos(2x-1);$

i) $y=(cos\,5x)^{shx};$ j) $y=\frac{(x+5)^4(x-1)^2}{\sqrt[5]{(x-4)^3}};$

k) $y=log_2 x+2y;$ l) $\begin{cases} x=6\cos^3 t, \\ y=2\sin^3 t\,! \end{cases}$

28.

a) $y=\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}-5x^3;$ b) $y=\frac{7}{(3x-4)^2}+\sqrt{9-x-2x^2};$

c) $y=\sqrt{arctgx}\cdot sin^5 2x^3;$ d) $y=12x^2 arcsin^3\sqrt{x};$

e) $y=cth^5 3x\cdot arcsin^4 2x;$ f) $y=\frac{\sqrt{5x^2-3x+1}}{e^{x^2+3}};$

g) $y=\frac{9\,arcsin\sqrt{x}}{ln\sqrt{x}};$ h) $y=\sqrt[5]{\frac{4x-1}{4x+1}}\cdot tg(4x-1);$

i) $y=\left(\sqrt{3x+2}\right)^{arctg\sqrt{x}};$ j) $y=\frac{\sqrt[6]{(x-6)^5}}{(x-4)^3(x+7)^4};$

k) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=sin\,y;$ l) $\begin{cases} x=\frac{1}{t+2}, \\ y=\frac{t}{(t+2)^2}\,! \end{cases}$

29.

a) $y=\frac{12}{x^3}-\frac{2}{x}+\frac{7}{x^7}-\sqrt[8]{x^5};$ b) $y=\sqrt[4]{(x^2-x+1)^3}-\frac{1}{(2x-3)^2};$

c) $y=sin\sqrt[5]{x}\cdot arctg\,2x^3;$ d) $y=e^{sin3x}cos^3 3x;$

e) $y=2(7-x)^3 ch^2(2x+1);$ f) $y=\frac{e^{-sin\,x}}{(x+4)^2};$

g) $y=\dfrac{log_5\left(2x^3-1\right)}{\left(x-2\right)^5}$;

h) $y=\sqrt[6]{\dfrac{10x-1}{10x+1}}\cdot ln\left(2x^3-5\right)$;

i) $y=\left(log_2\left(3x+5\right)\right)^{\frac{2}{x}}$;

j) $y=\dfrac{\left(7x-1\right)^{10}\left(x+2\right)^7}{\sqrt[7]{\left(x-3\right)^6}}$;

k) $y^3=8xy+7$;

l) $\begin{cases} x=\left(2t+5\right)\sin t, \\ y=4t^2\ ! \end{cases}$

30.

a) $y=15x^2-\dfrac{8}{x}+\dfrac{4}{x^3}+3x^6$;

b) $y=\dfrac{4}{7x^2-2x+5}-\sqrt[3]{\left(x-2\right)^2}$;

c) $y=ctg^5\left(2x+3\right)\cdot arcsin\sqrt{x}$;

d) $y=ln^4\left(2x+1\right)\cdot cos\left(2x+1\right)^2$;

e) $y=e^{th^2x}ch\sqrt{x+1}$;

f) $y=\dfrac{ctg\,5x}{e^{x^3}}$;

g) $y=\dfrac{4ln\,5x}{\left(x+4\right)^3}$;

h) $y=\sqrt[7]{\dfrac{3x+4}{3x-4}}\cdot log_4\left(5x-2\right)$;

i) $y=\left(cth5x\right)^{\sqrt{x+1}}$;

j) $y=\dfrac{\sqrt[8]{\left(x-5\right)^7}}{\left(x+1\right)^5\left(x-1\right)^4}$;

k) $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{7}=cos\,y$;

l) $\begin{cases} x=3\cos^2 t, \\ y=2\sin^2 t\ ! \end{cases}$

Tipikus változat megoldása

Deriválja az alábbi függvényeket:

a) $y=3x^4-\dfrac{5}{x^3}+\sqrt[5]{x^8}-2x+3$;

Megoldás.

$$y'=3\cdot 4x^3-\left(-3\right)x^{-4}+\frac{8}{5}x^{\frac{3}{5}}-2=12x^3+\frac{15}{x^4}+\frac{8}{5}\sqrt[5]{x^3}-2\,.$$

b) $y=\sqrt[4]{\left(3x^2-2x+1\right)^3}-\dfrac{6}{\left(x-2\right)^2}$;

Megoldás.

$$y' = \frac{3}{4}\left(3x^2 - 2x + 1\right)^{-\frac{1}{4}}(6x-2) - 6(-2)(x-2)^{-3} =$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{2(3x-1)}{\sqrt[4]{3x^2 - 2x1}} + \frac{12}{(x-2)^3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3x-1}{\sqrt[4]{3x^2 - 2x + 1}} + \frac{12}{(x-2)^3}.$$

c) $y = arccos\sqrt{x} \cdot tg^6(3x+1)$;

Megoldás.

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot tg^6(3x+1) + arccos\sqrt{x} \cdot 6tg^5(3x+1) \times$$

$$\times \frac{1}{cos^2(3x+1)} \cdot 3 = -\frac{tg^6(3x+1)}{2\sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x}} + \frac{18\,arccos\sqrt{x} \cdot tg^5(3x+1)}{cos^2(3x+1)} =$$

$$= \frac{18\,arccos\sqrt{x} \cdot tg^5(3x+1)}{cos^2(3x+1)} - \frac{tg^6(3x+1)}{2\sqrt{x(1-x)}}.$$

d) $y = ln^3 5x \cdot arctg 8x^2$;

Megoldás.

$$y' = 3ln^2 5x \cdot \frac{1}{5x} \cdot 5 \cdot arctg 8x^2 + ln^3 5x \cdot \frac{1}{1+64x^4} \cdot 16x =$$

$$= \frac{3}{x} ln^2 5x \cdot arctg 8x^2 + \frac{16x \cdot ln^3 5x}{1+64x^4}.$$

e) $y = e^{-5x^2} \cdot sh^3 2x$;

Megoldás.

$$y' = e^{-5x^2} \cdot (10x) \cdot sh^3 2x + e^{-5x^2} \cdot 3sh^2 2x \cdot ch2x \cdot 2 =$$

$$= 2e^{-5x^2} sh^2 2x(3ch2x - 5xsh2x).$$

f) $y = \dfrac{\sqrt{3x^2 - 5x + 3}}{2e^{3x}}$;

Megoldás.

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{\dfrac{(6x-5)e^{3x}}{2\sqrt{3x^2 - 5x + 3}} - \sqrt{3x^2 - 5x + 3} \cdot e^{3x} \cdot 3}{e^{6x}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{3x}\left(6x - 5 - 3 \cdot 2\left(3x^2 - 5x + 3\right)\right)}{e^{6x} \cdot 2\sqrt{3x^2 - 5x + 3}} = \frac{6x - 5 - 18x^2 30x - 18}{4e^{3x}\sqrt{3x^2 - 5x + 3}} =$$

$$= \frac{36x - 23 - 18x^2}{4e^{3x}\sqrt{3x^2 - 5x + 3}};$$

g) $y = \dfrac{5\,log_2(3x+1)}{sin^3 2x}$;

Megoldás.

$$y' = 5 \cdot \frac{\dfrac{3\,sin^3 2x}{(3x+1)ln\,2} - log_2(3x+1)\cdot 3\,sin^2 2x \cdot cos\,2x \cdot 2}{sin^6 2x} =$$

$$= 5\frac{3\,sin^2 2x\left(sin\,2x - 2(3x+1)ln\,2 \cdot log_2(3x+1)cos\,2x\right)}{(3x+1)ln\,2 \cdot sin^6 2x}.$$

h) $y = \sqrt[5]{\dfrac{2x-3}{2x+3}}\,lg(3x+7)$;

Megoldás.

$$y' = \frac{1}{5}\left(\frac{2x-3}{2x+3}\right)^{-\frac{4}{5}} \cdot \frac{2(2x+3)-(2x-3)\cdot 2}{(2x+3)^2}lg(3x+7) +$$

$$+\sqrt[5]{\frac{2x-3}{2x+3}} \cdot \frac{3}{(3x+7)ln10} = \frac{1}{5}\sqrt[5]{\left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)^4} \cdot \frac{12\,lg(3x+7)}{(2x+3)^2} +$$

$$+\sqrt[5]{\frac{2x-3}{2x+3}} \cdot \frac{3}{(3x+7)ln10} = \frac{12}{5}\frac{lg(3x+7)}{(2x+3)^2}\sqrt[5]{\left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)^4} +$$

$$+\frac{3}{(3x+7)ln10}\sqrt[5]{\frac{2x-3}{2x+3}}.$$

i) $y = (th5x)^{\ln(2x+7)}$;

Megoldás.

Logaritmizáljuk a megadott függvényt:

$ln\,y = ln(2x+7)\cdot ln(th5x)$, akkor deriváljuk mindkét oldalát:

$$\frac{1}{y}y' = \frac{2}{2x+7}ln(th5x) + ln(2x+7)\cdot\frac{5}{th5x \cdot ch^2 5x}.$$

Innen megkeressük az y':

$$y' = (th5x)^{ln(2x+7)}\left(\frac{2\,ln(th5x)}{2x+7} + \frac{5\,ln(2x+7)}{th5x \cdot ch^2 5x}\right).$$

j) $y=\dfrac{\sqrt[5]{(x-3)^3}}{(x-2)^6(x+7)^7}$;

Megoldás.

A logaritmikus deriválás alapján: $ln\, y=\dfrac{3}{5}ln(x-3)-6ln(x-2)-7ln(x+7)$, most deriváljuk:

$$\frac{1}{y}y'=\frac{3}{5(x-3)}-\frac{6}{x-2}-\frac{7}{x+7};$$

$$y'=\frac{\sqrt[5]{(x-3)^3}}{(x-2)^6(x+7)^7}\left(\frac{3}{5(x-3)}-\frac{6}{x-2}-\frac{7}{x+7}\right).$$

k) $x^3y-y^2=6x$;

Megoldás.

Deriváljuk az egyenlet mindkét oldalát:

$$3x^2y+x^3y'-2yy'=6,$$

innen

$$y'=\frac{6-3x^2y}{x^3-2y}.$$

l) $\begin{cases} x=3t^3-2t^2, \\ y=t^3-6\,! \end{cases}$

Megoldás.

Mivel $x'_t=9t^2-4t$, $y'_t=3t^2$, ezért

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{3t^2}{9t^2-4t}=\frac{3t}{9t-4}.$$

5. Derivált alkalmazása

Ha az $y = f(x)$ függvény deriválható az (a,b) intervallumon és $f'(x) > 0$ minden $x \in (a,b)$, akkor az $f(x)$ függvény szigorúan monoton növekvő az (a,b) intervallumon; ha pedig $f'(x) < 0$ minden $x \in (a,b)$, akkor az $f(x)$ függvény szigoruan monoton csökkenő ezen az intervallumon. Ha létezik olyan környezete az x_0 pontnak, hogy tetszőleges $x \neq x_0$ ebből a környezetből teljesül az $f(x) > f(x_0)$ egyenlőtlenség (vagy $f(x) < f(x_0)$), akkor az x_0 pontot helyi minimum (maximum) pontjának nevezzük az $y = f(x)$ függvénynek és az $f(x_0)$ – a függvény helyi minimumának (maximumának) nevezzük. Ezen pontokat a függvény szélsőértékhelyeinek nevezzük. Azon pontokat, melyekben az $f'(x) = 0$ vagy az $f'(x)$ nem létezik, a függvény kritikus pontjainak nevezzük.

Szükséges feltétel. Ha az x_0 pont az $f(x)$ függvény szélsőértékhelye, akkor $f'(x_0) = 0$ vagy $f'(x_0)$ nem létezik.

Elégséges feltételek.

1) Legyen $f(x)$ deriválható az x_0 kritikus pont valamely $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ környezetében, kivételesen az x_0 pontban. Akkor, ha $f'(x_0) > 0$ minden $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ és $f'(x_0) < 0$ minden $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, akkor az $x_0 -$ helyi maximum pont; ha $f'(x_0) < 0$ minden $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ és $f'(x_0) > 0$ minden $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, akkor az $x_0 -$ helyi minimum pont.

2) Legyen $y = f(x)$ függvény kétszer deriválható az x_0 kritikus pontban és annak valamely környezetében. Ha $f''(x_0) < 0$, akkor az $x_0 -$ helyi maximum pont, ha $f''(x_0) > 0$, akkor $x_0 -$ helyi minimum pont. Ha pedig $f''(x_0) = 0$, akkor további vizsgálatra van szükség.

OM-5.1

1. Igazolja, hogy az $y = x^3 + x$ függvény szigoruan monoton növekvő!
2. Határozza meg az alábbi függvények monotonitásának intervallumait:

a) $y = x^4 - 2x^2 - 5$;

b) $y = x^2 e^{-x}$;

c) $y = \dfrac{x}{\ln x}$;

d) $y = x - 2\sin x,\ \ 0 \le x \le 2\pi$!

3. Határozza meg az alábbi függvények szélsőértékhelyeit:

a) $y = 2x^3 - 3x^2$;

b) $y = \dfrac{2}{3} x^2 \sqrt[3]{6x - 7}$!

4. Határozza meg az alábbi függvények szélsőértékhelyeit a második derivált segítségével:

a) $y = x^3 - 2ax^2 + a^2 x \ \ (a > 0)$;

b) $y = x^2 e^{-x}$!

ÖM-5.1

1. Határozza meg az alábbi függvény monotonitásának intervallumait:

$$y = \frac{x}{x^2 - 6x - 16} \text{ !}$$

2. Határozza meg az alábbi függvény szélsőértékhelyeit:

$$y = \sqrt[3]{\left(x^2 - 6x5\right)^2} \text{ !}$$

2. Határozza meg az alábbi függvény monotonitásának intervallumait:

$$y = (x-2)^5 (2x+1)^4 \text{ !}$$

3. Határozza meg az alábbi függvény szélsőértékhelyeit:

$$y = x - \ln(1 + x) \text{ !}$$

4. Határozza meg az alábbi függvény monotonitásának intervallumait:

$$y = x - e^x \text{ !}$$

5. Határozza meg az alábbi függvény szélsőértékhelyeit:

$$y = -x^2 \sqrt{x^2 + 2} \text{ !}$$

OM-5.1

1. Határozza meg az alábbi függvények monotonitásának intervallumait:

1.1. a) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 14$; b) $y = 2x^2 - ln\,x$;

b) $y = 2\sqrt{3}\sin x - 3x \quad (0 \le x \le 2\pi)$!

1.2. a) $y = (x-2)^4(2x+1)^3$; b) $y = xe^x$;

c) $y = 2x + \cos x$!

1.3. a) $y = \dfrac{1 - x + x^2}{1 + x + x^2}$; b) $y = ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$;

c) $y = 2\sin x + \cos 2x, \quad (0 \le x \le 2\pi)$!

1.4. a) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$; b) $y = \dfrac{x^2}{e^x}$;

c) $y = x + 3tgx$!

1.5. a) $y = (x-3)^5(3x-1)^2$; b) $y = x^2 + ln\,x$;

c) $y = \sin x - \cos x, \quad (-\pi \le x \le 0)$!

1.6. a) $y = \dfrac{10}{4x^3 - 9x^2 + 6x}$; b) $y = x - ln\left(1 + x^2\right)$;

c) $y = 3x + 3\cos x$!

1.7. a) $y = 3x^3 - 4^2$; b) $y = xe^{-x}$;

c) $y = ctgx - x$!

1.8. a) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$; b) $y = \dfrac{ln\,x}{x}$;

c) $y = tgx + 2x$!

1.9. a) $y = \dfrac{4x - x^2 - 4}{x}$; b) $y = e^{\frac{1}{5+x}}$;

c) $y = \sqrt{3}x - 2\,sin\,x, \quad (0 \le x \le 2\pi)$!

1.10. a) $y = \dfrac{x+1}{(x-1)^2}$; b) $y = x + \dfrac{ln\,x}{x}$;

c) $y = 5tgx + 1$!

1.11. a) $y=\dfrac{x}{9-x}$; b) $y=x^2-2\ln x$;

c) $y=3ctgx-5$!

1.12. a) $y=3x^4-2x^3-6x^2+6x$; b) $y=-\ln\dfrac{1+x}{1-x}$;

c) $y=2x+\cos x$!

1.13. a) $y=\dfrac{(x-2)^3}{x+1}$; b) $y=\ln\left(x^2+1\right)$;

c) $y=3tgx+7$!

1.14. a) $y=\dfrac{x^3}{x^2-x+1}$; b) $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$;

c) $y=2\cos x-2\sin x,\ \ (-\pi\le x\le 0)$!

1.15. a) $y=x^5-5x^4+5x^3+1$; b) $y=x^2e^{\frac{1}{x}}$;

c) $y=1+tg^2x,\ \ \left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$!

1.16. a) $y=\dfrac{x^2+6}{x^2+1}$; b) $y=\sqrt{x}\ln x$;

c) $y=\sin 2x+2\cos x,\ \ \left(-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right)$!

1.17. a) $y=\sqrt[3]{\left(x^2-a^2\right)^2}$; b) $y=\ln\left(x^2+1\right)-x$;

c) $y=arctgx+x$!

1.18. a) $y=\sqrt{2x-x^2}$; b) $y=ae^{px}+be^{-px}$;

c) $y=x-arcctgx$!

1.19. a) $y=\dfrac{x^2-x-1}{x^2-2x}$; b) $y=x\ln x$;

c) $y=3\sin x-3\cos x,\ \ (-\pi\le x\le 0)$!

1.20. a) $y=x\sqrt{ax-x^2}\ \ (a>0)$; b) $y=e^{\sqrt{x^2-1}}$;

c) $y=3arctgx+x^3$!

1.21. a) $y=\dfrac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$; b) $y=\dfrac{1}{\ln\left(x^4+4x^3+30\right)}$;

c) $y = cos\,2x - sin^2 x, \quad (0 \le x \le 2\pi)$!

1.22. a) $y = \dfrac{4\sqrt{3}}{9x\sqrt{1-x}}$; b) $y = x - ln(1+x)$;

c) $y = x\,sin\,x + cos\,x, \quad (0 \le x \le 2\pi)$!

1.23. a) $y = (x - 5^2)\sqrt[3]{(x+1)^2}$; b) $y = \dfrac{-3}{x} + e^x$;

c) $y = \sec x + 5, \quad \left(0 \le x \le 2\pi, \ x \ne \dfrac{\pi}{2}; \ \dfrac{3\pi}{2}\right)$!

1.24. a) $y = (2x-3)^3(x+5)^5$; b) $y = \dfrac{1}{x} + e^{-x}$;

c) $y = \sec x + \cos ec\, x, \quad \left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}, \ x \ne 0\right)$!

1.25. a) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$; b) $y = ln(1+x) - x$;

c) $y = 2 + 5tgx$!

1.26. a) $y = \dfrac{x+3}{(x+3)^2}$; b) $y = e^x - \dfrac{2}{x}$;

c) $y = 7ctgx - 2$!

1.27. a) $y = \dfrac{x^3+4}{x^2}$; b) $y = \dfrac{e^{2x}+1}{e^x}$;

c) $y = arcsin\,x + x^3$!

1.28. a) $y = \dfrac{x^2}{(x+2)^2}$; b) $y = x + ln(x^2 - 4)$;

c) $y = arccos\,x - x^3$!

1.29. a) $y = \dfrac{x^4}{x^3-1}$; b) $y = -x\,ln^2 x$;

c) $y = 3x - \cos x$!

1.30. a) $y = (x+1)\sqrt[3]{x^2}$; b) $y = (x+1)e^{2x}$;

c) $y = sin\,2x - 5x$!

2. Határozza meg az alábbi függvények szélsőértékhelyeit:

2.1. a) $y = \dfrac{4\sqrt{3}}{9x\sqrt{1-x}}$; b) $y = 2e^{3x} + 3e^{-2x}$!

2.2. a) $y = 3x^2 - 2x^3$; b) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{ln\, x}$!

2.3. a) $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$; b) $y = x\, sin\, x + cos\, x - \dfrac{1}{4}x^2$;

$\left(-\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}\right)$!

2.4. a) $y = x^4 - 2x^2 + 5$; b) $y = 2x^2 - ln\, x$!

2.5. a) $y = \sqrt[3]{\left(x^2 - 4\right)^2}$; b) $y = e^{\frac{x^2}{4-x}}$!

2.6. a) $y = \dfrac{x-1}{(x+1)^2}$; b) $y = x + 2\, sin\, x$;

$(0 \le x \le 2\pi)$!

2.7. a) $y = \dfrac{x^2}{4x^2 - 1}$; b) $y = x^3 e^{\frac{-x^2}{2}}$!

2.8. a) $y = \dfrac{4x - x^2 - 4}{x}$; b) $y = x - 2arctgx$!

2.9. a) $y = 4x^3 - 6x^2 - 24x + 9$; b) $y = \dfrac{e^{2x}}{e^x - 1}$!

2.10. a) $y = \dfrac{(x-2)^2}{x+1}$; b) $y = x + 2\, cos\, x$;

$(0 \le x \le 2\pi)$!

2.11. a) $y = x^4 + 2x^2 - 8x - 5$; b) $y = \dfrac{ln\, x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$!

2.12. a) $y = (x+1)\sqrt[3]{x}$; b) $y = \dfrac{x^2}{ln\, x}$!

2.13. a) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$; b) $y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x}$!

2.14. a) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$; b) $y = ln\left(1 + x^2\right) - x$!

2.15. a) $y=\dfrac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$; b) $y=e^{2x}(x-1)$!

2.16. a) $y=\dfrac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$; b) $y=e^{-x}(x^2-3)$!

2.17. a) $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$; b) $y=sin\,2x-x$!

2.18. a) $y=2x^3+3x^2-12x-5$; b) $y=2arctgx+\dfrac{5}{2(1+x^2)}$!

2.19. a) $y=x^2(x-12)^2$; b) $y=2cos\dfrac{x}{2}+3cos\dfrac{x}{3}$!

2.20. a) $y=\dfrac{(x-2)(8-x)}{x^2}$; b) $y=chx$!

2.21. a) $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$; b) $y=\dfrac{e^x}{x}$!

2.22. a) $y=\dfrac{16}{x(4-x^2)}$; b) $y=x\,ln^2x$!

2.23. a) $y=\dfrac{x^2}{x^2+3}$; b) $y=2xe^x$!

2.24. a) $y=\dfrac{4}{\sqrt{x^2+8}}$; b) $y=x-arctgx$!

2.25. a) $y=x(x-1)^2(x-2)^2$; b) $y=x-ln(1+x)$!

2.26. a) $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-4}}$; b) $y=x\,ln\,x$!

2.27. a) $y=\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$; b) $y=x^2e^{-x}$!

2.28. a) $y=(1+x^2)(2-x)$; b) $y=2^{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$!

2.29. a) $y=\dfrac{x}{x-2}$; b) $y=2sin2x+sin4x$!

2.30.a) $y=(x-3)\sqrt{x}$; b) $y=\dfrac{ln\,x}{x}$!

3. Határozza meg az alábbi függvények szélsőértékhelyeit a második derivált segítségével:

3.1. $y = x + \frac{4}{x}$;

3.2. $y = x + \sqrt{1-x}$;

3.3. $y = \frac{x^2}{e^x}$;

3.4. $y = ch2x$;

3.5. $y = \frac{x}{\ln x}$;

3.6. $y = \frac{e^{-x}}{x}$;

3.7. $y = \ln(1+x^2)$;

3.8. $y = x^4(12\ln x - 7)$;

3.9. $y = (x+2)^6 + 2x + 2$;

3.10. $y = e^{arctgx} - arctgx$;

3.11. $y = x^2 - \arcsin x$;

3.12. $y = \frac{\ln x}{x}$;

3.13. $y = \frac{a}{x}\ln\frac{x}{2}(a > 0)$;

3.14. $y = -\sqrt{x-5}$;

3.15. $y = \frac{9}{x} + x$;

3.16. $y = \frac{x^2}{3-x^2}$;

3.17. $y = x^2 + \frac{2}{x}$;

3.18. $y = x^3 - 3x^2 + 5$;

3.19. $y = \frac{2}{x} + \frac{x}{2}$;

3.20. $y = x^3(x-2)^2$;

3.21. $y = e^{-x^2}$;

3.22. $y = xe^x$;

3.23. $y = x^4 - 2x^2 - 4$;

3.24. $y = \ln\cos x$;

3.25. $y = \ln\sin x$;

3.26. $y = \frac{\ln x}{x^2}$;

3.27. $y = \frac{x}{x^2+1}$;

3.28. $y = e^{\sin x}$ $(0 \le x \le 2\pi)$;

3.29. $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$;

3.30. $y = \frac{e^x}{x+1}$!

Tipikus változat megoldása

1. Határozza meg az alábbi függvények monotonitásának intervallumait::

a) $y = \frac{x^2+12}{x+2}$.

Megoldás.

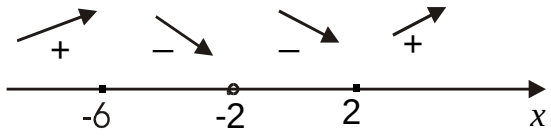
Az $x=-2$ pontban a függvénynek szakadása van.

$$y'=\frac{2x(x+2)-(x^2+12)}{(x+2)^2}=\frac{x^2+4x-12}{(x+2)^2}=\frac{(x+6)(x-2)}{(x+2)^2};$$

Ha $y'=0,$ akkor $(x+6)(x-2)=0,$ innen kapjuk, hogy $x_1=-6;\ x_2=2$ kritikus pontok.

Az $x_3=-2$ pontban nem létezik derivált, de ez a pont nem kritikus, mivel nem tartozik hozzá a függvény értelmezési tartományához.

Az $x_1=-6,\ x_2=2,\ x_3=-2$ pontok felosztják 4 intervallumra a számegyenest. Meghatározzuk minden intervallumon a derivált előjelét.



Mivel $y'>0$ az $(-\infty;-6)\cup(2;\infty)$, ezért a függvény itt monoton növekvő;

$y'<0$ az $(-6;-2)\cup(-2;2)$, ezért a függvény itt monoton csökkenő.

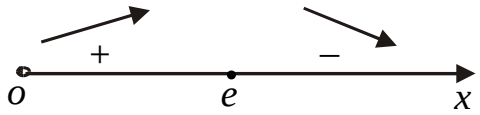
b) $y=\dfrac{ln\,x}{x}+2;$

Megoldás.

A függvény értelmezett a $(0;+\infty)$ intervallumon.

$$y'=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-ln\,x}{x^2}=\frac{1-ln\,x}{x^2};\ \ y'=0\Rightarrow ln\,x=1\Rightarrow x=e.$$

Az $x=e$ kritikus pont felosztja a függvény értelmezési tartományát két intervallumra. Meghatározzuk ezeken a derivált előjelét:



Az $(0;e)$ $y'>0$, ezért a függvény monoton növekvő. Az $(e;+\infty)$ $y'<0$, ezért a függvény monoton csökkenő.

c) $y = 5x + sin\,2x.$

Megoldás.

A függvény mindenütt értelmezve van. $y' = 5 + 2cos\,2x.$ Mivel $|cos\,2x| \le 1$ minden $x \in R,$ ezért $-2 \le 2cos\,2x \le 2.$ Tehát $5 + 2cos\,2x > 0$ mindenütt, vagyis a függvényünk monoton növekvő a valós számok halmazán.

2. Határozza meg az alábbi függvények szélsőértékhelyeit:

a) $y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 24x - 9.$

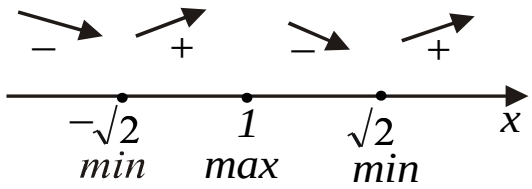
Megoldás.

$$y' = 12x^3 - 12x^2 - 24x + 24 = 12\left[x^2(x-1) - 2(x-1)\right] =$$

$$= 12(x-1)\left(x^2 - 2\right) = 12(x-1)\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right).$$

$y' = 0 \Rightarrow \left(x_1 = 1; x_2 = \sqrt{2}; x_3 = -\sqrt{2}\right)$ kritikus pontok, melyek felosztják a számegyenest négy szakaszra.

Mindegyiken meghatározzuk a derivált előjelét.



Mivel az $x = \pm\sqrt{2}$ pontokon áthaladva a derivált előjelet vált «-»-ról «+»-ra, ezért a függvénynek ezen pontjai minimum pontjai.

$$y_{min} = y\left(-\sqrt{2}\right) = 3\left(-\sqrt{2}\right)^4 - 4\left(-\sqrt{2}\right)^3 - 12\left(-\sqrt{2}\right)^{-2} +$$

$$+ 24\left(-\sqrt{2}\right) - 9 \approx -43{,}6;\ \ y_{min} = y\left(\sqrt{2}\right) \approx 1{,}6.$$

Az $x = 1$ ponton áthaladva a derivált előjelet vált «+»-ról «-»-ra, ezért ezen pontja a függvény maximuma: $y_{max} = y(1) = 3 - 4 - 12 + 24 - 9 = 2.$

b) $y = x - 2cos\,x.\left(0 \le x \le 2\pi\right).$

Megoldás.

$$y' = 1 + 2sin\,x;\ \ y' = 0 \Rightarrow 1 + 2sin\,x = 0 \Rightarrow sin\,x = -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{7\pi}{6}; \\ x_2 = \dfrac{11\pi}{6}. \end{array} \right.$$

A kapott kritikus pontok felosztják az egységes kört az alábbi intervallumokra $\left(0;\frac{7\pi}{6}\right)$, $\left(\frac{7\pi}{6};\frac{11\pi}{6}\right)$ és $\Rightarrow\left(\frac{11\pi}{6};2\pi\right)$ a megadott $0 \le x \le 2\pi$ szakaszon. Meghatározzuk a derivált előjelét mindegyik szakaszon (5.1. ábra). Mivel:

1) $y' > 0,$ vagyis, $sin\,x > -\frac{1}{2}$ az $\left(0;\frac{7\pi}{6}\right)\cup\left(\frac{11\pi}{6};0\right)$, ezért itt a függvény monoton növekvő.

2) $y' < 0,$ vagyis, $sin\,x < -\frac{1}{2}$ az $\left(\frac{7\pi}{6};\ \frac{11\pi}{6}\right)$, ezért itt a függvény monoton csökkenő.

Az $x = \frac{7\pi}{6}$ ponton áthaladva a derivált előjelet vált «+»-ról «-»-ra, és az $x = \frac{11\pi}{6}$ ponton áthaladva «-»-ról «+»-ra, ezért a függvény szélsőértékhelyei:

$$y_{max} = y\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{7\pi}{6} - 2cos\frac{7\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} - 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \approx 4{,}67.$$

$$y_{min} = y\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{11\pi}{6} - 2cos\frac{11\pi}{6} = \frac{11\pi}{6} - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 4{,}03.$$

3. Határozza meg az $y = x^3e^{-x}$ függvény szélsőértékhelyeit a második derivált segítségével!

Megoldás.

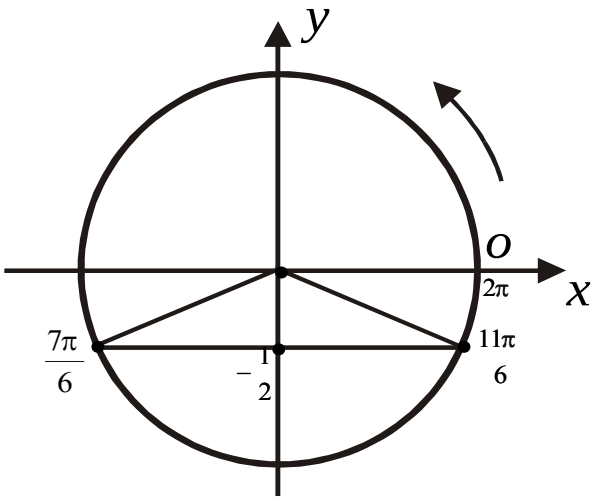
$$y' = 3x^2e^{-x} - x^3e^{-x} = \left(3x^2 - x^3\right)e^{-x};$$

$$y'' = \left(6x - 3x^2\right)e^{-x} - \left(3x^2 - x^3\right)e^{-x} = \left(x^3 - 6x^2 + 6x\right)e^{-x}.$$

Mivel a derivált folytonos minden $x \in R$, ezért a kritikus pontok kielégítik a $3x^2 - x^3 = 0$ egyenletet, vagyis $x_1 = 0,\ x_2 = 3$.

Megkeressük a második deriváltak értékeit ezen pontokban: $y''(0) = 0$, vagyis, $x_1 = 0$ - inflexiós pont, $y''(3) = -9e^{-3} < 0$, vagyis, $x_2 = 3$ - maximum pont.

$$y_{max} = y(3) = 27e^{-3} \approx 1{,}34.$$

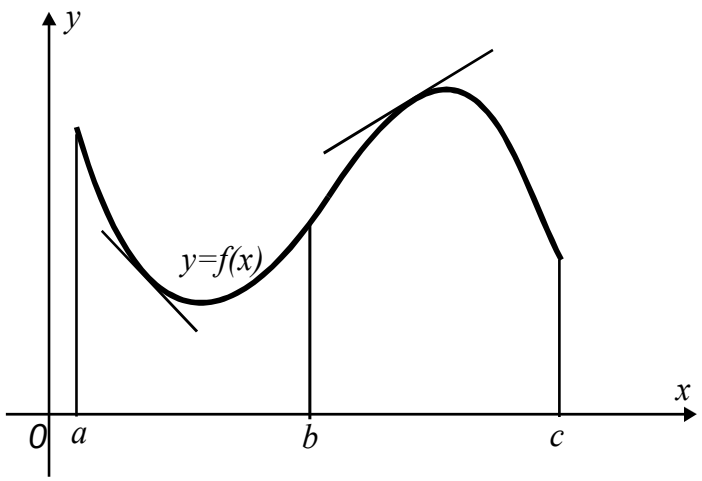


5.1. ábra

6. Függvényvizsgálat

1. Konkáv és konvex függvények egy intervallumon. Inflexiós pont.

Az $y = f(x)$ függvény grafikonját konvexnek nevezzük az (a,b) intervallumon, ha a grafikon görbe az (a,b) intervallumon az (a,b) szakaszról vett x pontban húzott érintő felett helyezkedik el. Ha a (b,c) intervallumon a grafikon görbe a (b,c) szakaszról vett x pontban húzott érintő alatt helyezkedik el, akkor az $y = f(x)$ függvény grafikonját konkávnak nevezzük a (b,c) intervallumon (6.1 ábra).



6.1 ábra

Ha az $y = f(x)$ függvény kétszer deriválható az (a,b) intervallumon és $f''(x) > 0$, akkor az konvex az (a,b) intervallumon; ha pedig $f''(x) < 0$ a (b,c) intervallumon, akkor az konkáv a (b,c) intervallumon.

Azon pontokat, melyekben a függvény grafikonja görbületet vált (konvexről konkávra, vagy fordítva) a függvény inflexiós pontjainak nevezzük.

2. Aszimptoták.

Ha az $y = f(x)$ függvényre létezik olyan egyenes, hogy az $M(x, f(x))$ pont és az egyenes közti távolság a nullához közelit, amikor az M pont a végtelenségbe tart az origóhoz képest, akkor ezt az egyenest a függvény asziptotájának nevezzük.

Az $x = a$ egyenes függőleges aszimptotája az $y = f(x)$ függvénynek, ha $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$ vagy $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \infty$. Folytonos függvényeknek nincs függőleges aszimptotája.

Az $y = kx + b$ ferde aszimptota, ha a következő határértékek léteznek és végesek:

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \frac{f(x)}{x} = k \text{ és } \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \left(f(x) - kx \right) = b .$$

OM-6.1

1. Igazolja, hogy az $y = x\,arctgx$ függvény grafikonja konvex a valós számok halmazán!

2. Igazolja, hogy az $y = ln\left(x^2 - 1\right)$ függvény grafikonja konkáv a valós számok halmazán!

3. Határozza meg az $y = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2$ függvény görbületeinek intervallumait és az inflexiós pontokat!

4. Végezze el a teljes függvényvizsgálatot az alábbi függvényeknél:

a) $y = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$; b) $y = x^3 e^{-x}$!

ÖM-6.1

Végezze el a teljes függvényvizsgálatot az alábbi függvényeknél és ábrázolja azokat:

1. $y = -ln\left(x^2 - 4x + 5\right)$.

2. $y = \dfrac{2x - 1}{(x - 1)^2}$.

3. $y = x^2 + \dfrac{2}{x}$!

IM-6.1

Végezze el a teljes függvényvizsgálatot az alábbi függvényeknél és ábrázolja azokat!

1. a) $y=\dfrac{2(x+1)^2}{x-2}$; b) $y=e^{2x-x^2}$.

2. a) $y=\dfrac{2+x}{(x+1)^2}$; b) $y=x+ln(x^2-4)$.

3. a) $y=\dfrac{(1-x)^3}{(x-2)^2}$; b) $y=x\,ln^2 x$.

4. a) $y=\dfrac{x^2}{(x+3)^2}$; b) $y=\dfrac{4e^{x^2}-1}{e^{x^2}}$.

5. a) $y=\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2$; b) $y=x^2e^{-x^2/2}$.

6. a) $y=\dfrac{x^3}{9-x^3}$; b) $y=xe^{1/x}$.

7. a) $y=\dfrac{4x}{4+x^2}$; b) $y=ln(9-x^2)$.

8. a) $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$; b) $y=xe^x$.

9. a) $y=\dfrac{2x^2+4x+2}{2-x}$; b) $y=x^2e^{1/x}$.

10. a) $y=(x^2-1)^3$; b) $y=(x+2)e^{1-x}$.

11. a) $y=32x^2(x^2-1)^3$; b) $y=\dfrac{ln\,x}{x}$.

12. a) $y=\dfrac{1}{x}+4x^2$; b) $y=(x+1)e^{2x}$.

13. a) $y=x^2+\dfrac{1}{x^2}$; b) $y=ln(x^2-2x+6)$.

14. a) $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$; b) $y=ln\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

15. a) $y(x^3+8)=x^4$; b) $y=x^3e^{x+1}$.

16. a) $y(x-1)(x-2)(x-3)=1$; b) $y=x\,sin\,x$.

17. a) $y=\sqrt[3]{x^2}-x;$ b) $y=x+\sin x.$

18. a) $(y-x)x^4+8=0;$ b) $y=\ln\cos x.$

19. a) $y=\dfrac{x^3+2x^2+7x-3}{2x^2};$ b) $y=x-\ln(1+x^2).$

20. a) $xy=(x^2-1)(x-2);$ b) $y=1-\ln^3 x.$

21. a) $y(x-1)=x^3;$ b) $y=(x-1)e^{4x+2}.$

22. a) $y=\dfrac{x^5}{x^4-1};$ b) $y=-x\ln^2 x.$

23. a) $y=\dfrac{x^2+4}{x^2+1};$ b) $y=x^2-2\ln x.$

24. a) $y=\dfrac{x^2-x-1}{x^2-2x};$ b) $y=e^{1/(2-x)}.$

25. a) $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x};$ b) $y=-\ln\dfrac{1+x}{1-x}.$

26. a) $y=\dfrac{6x}{4-x^2};$ b) $y=\dfrac{1}{e^x-1}.$

27. a) $y=\dfrac{x^2+2-3x}{x+1};$ b) $y=\dfrac{e^x}{x}.$

28. a) $y=\dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^3};$ b) $y=x-2\,\mathrm{arctg}\,x.$

29. a) $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2};$ b) $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$

30. a) $y=\sqrt{8+x}-\sqrt{8-x};$ b) $y=\ln x-\mathrm{arctg}\,x.$

Tipikus változat megoldása

Végezze el a teljes függvényvizsgálatot az alábbi függvényeknél és ábrázolja azokat:

a) $y=\dfrac{(x+2)^2}{x-1}.$

Vizsgáljuk a függvényt az alábbi séma szerint.

1. Az értelmezési tartomány $x\in(-\infty;1)\cup(1;+\infty).$

2. A grafikon ordinátája $y > 0$ minden $x > 1$, $y < 0$ minden $x < 1$.

3. A tengelyekkel való metszéspontok:

az Ox tengellyel $y = 0, x = -2$, vagyis, $(-2;0)$;

az Oy tengellyel $x = 0, y = -4$, vagyis, $(0;-4)$.

4. A függvény nem periódikus és se nem páros, se páratlan, mivel $f(-x) = \dfrac{(-x+2)^2}{-x-1} \neq \begin{bmatrix} f(x), \\ -f(x). \end{bmatrix}$

5. Mivel az $x = 1$ másodfajú szakadási pont, ezért az $x = 1$ függőleges aszimptota, és emellett $\lim\limits_{x \to 1-0} y = \lim\limits_{x \to 1-0} \dfrac{(x+2)^2}{x-1} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 1+0} y = \lim\limits_{x \to 1+0} \dfrac{(x+2)^2}{x-1} = +\infty$.

Megkeressük a ferde aszimptotákat.

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x+2)^2}{x(x-1)} = 1,$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{(x+2)^2}{x-1} - x \right] =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + 4x + 4 - x^2 + x}{x-1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{5x+4}{x-1} = 5.$$

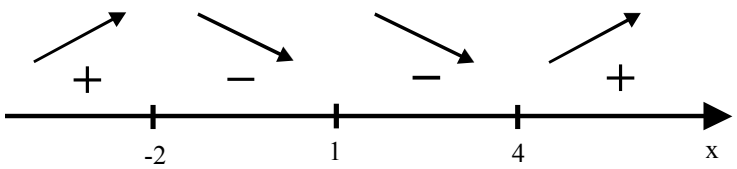
Tehát, az egyetlen aszimptota az $y = x + 5$.

6. Vizsgáljuk a függvény monotonitásának intervallumait.

$$y' = \frac{2(x+2)(x-1) - (x+2)^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - 4 - x^2 - 4x - 4}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{x^2 - 2x - 8}{(x-1)^2} = \frac{(x+2)(x-4)}{(x-1)^2}.$$

Az $x = 1$ pontban a derivált nem létezik, de ez a pont egyben nem tartozik hozzá az értelmezési tartományhoz, és így nem lesz kritikus pont. Abból, hogy $y' = 0$ kapjuk, hogy $(x+2)(x-4) = 0$, vagyis a kritikus pontok $x_1 = -2$, $x_2 = 4$. A derivált előjele:



Tehát, a függvény monoton növekvő a $(-\infty;-2)\cup(4;+\infty)$ és monoton csökkenő a $(-2;1)\cup(1;4)$. Az $x_1=-2$ és $x=4$ pontokban eléri helyi maximumát és minimumát megfelelően.

$$y_{max}=y(-2)=\frac{(-2+2)^2}{-2-1}=0;\quad y_{min}=y(4)=\frac{(4+2)^2}{4-1}=12.$$

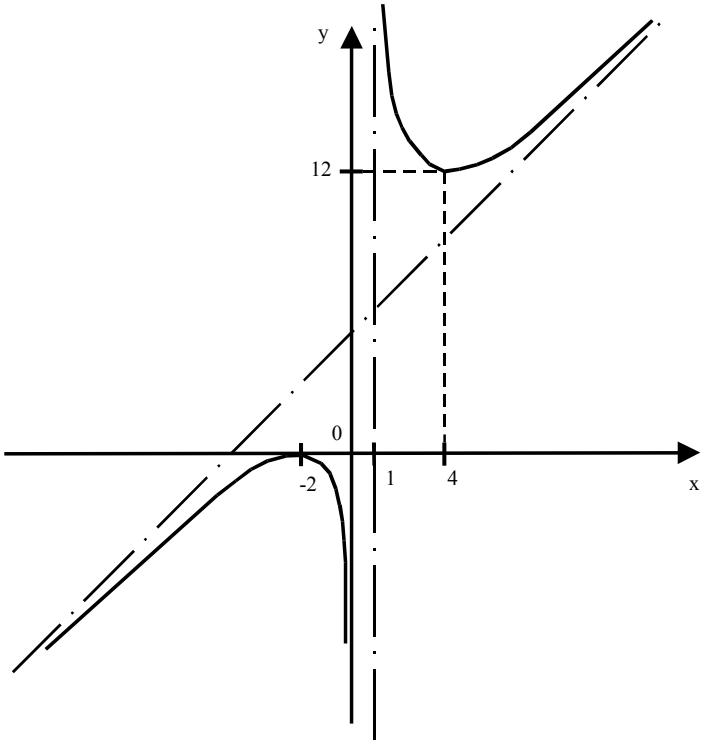
7. Megvizsgáljuk görbületére a függvényt.

$$y''=\frac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x-8)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}=$$

$$=\frac{2(x-1)(x^2-2x+1-x^2+2x+8)}{(x-1)^4}=$$

$=[$ mivel $x\neq 1$, ezért osztunk $(x-1)]=\dfrac{18}{(x-1)^3}$. Mivel $y''<0$ a $(-\infty;1)$, ezért itt a függvény konkáv; mivel $y''>0$ a $(1;+\infty)$, ezért itt a függvény konvex. Az $x=1$ pontban nem értelmezett, és az $y''\neq 0$ minden értelmezési tartományból vett pontban, ezért nincsenek inflexiós pontok.

8. Ábrázoljuk a függvénygörbét (6.2 ábra).



6.2 ábra

b) $y = x^2 \ln x.$

1. Értelmezési tartomány: $x \in (0;+\infty).$

2. A függvény nem periodikus; se páros se páratlan.

3. Az Oy tengelyt a függvény grafikonja nem metszi, mivel az $x = 0$ pont nem tartozik hozzá az értelmezési tartományhoz.

Az Ox tengellyel: $\begin{cases} y = 0; \\ x^2 \ln x = 0 \end{cases} \Rightarrow (1;0)$ - egy metszéspont.

4. Mivel a $(0;+\infty)$ intervallumon a függvénynek nincs szakadása, ezért nincsenek függőleges aszimptoták se. Vizsgáljuk a függvényt, amikor $x \to \pm 0$:

$$\lim_{x\to 0+0} y = \lim_{x\to 0+0} x^2 \ln x = [0\cdot(-\infty)] = \lim_{x\to 0+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0+0} \frac{1/x}{-2/x^3} = -\frac{1}{2} \lim_{x\to 0+0} x^2 = 0.$$

Tehát, $y \to 0$ amikor $x \to 0$ jobbról.

Megkeressük a ferde aszimptotákat:

$k = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2 \ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x \ln x = \infty$ -nincs ferde aszimptota.

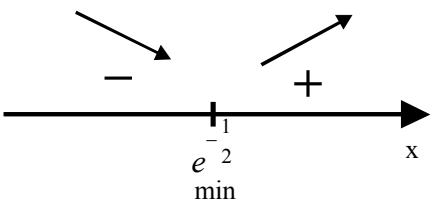
4. $y > 0$ ha $x > 1$ és $y < 0$ ha $0 < x < 1$.

5. Meghatározzuk a monotonitás intervallumokat és a szülsőértékhelyeket:

$y' = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1).$

$y' = 0 \Rightarrow 2 \ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = \frac{-1}{2} \Rightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} \approx 0{,}61 -$

egyetlen kritikus pont. A derivált előjele:



mivel, $y'(e) > 0;$ $y'(e^{-1}) < 0$. Tehát, a függvény monoton csökkenő a $\left(0; e^{-1/2}\right)$ intervallumon, és monoton növekszik a $\left(e^{-1/2}; +\infty\right)$ intervallumon, az $x = e^{-\frac{1}{2}}$ helyi minimum pont.

$$y_{min} = y\left(e^{-1/2}\right) = \left(e^{-1/2}\right)^2 ln\, e^{-1/2} = e^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) =$$
$$= -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2e} \approx -0{,}18.$$

6. Megvizsgáljuk görbületére a függvényt.

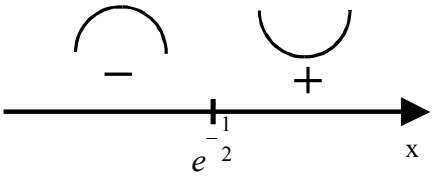
$$y'' = \left(2x\, ln\, x + x\right)' = 2\left(ln\, x + x \cdot \frac{1}{x}\right) + 1 = 2\, ln\, x + 3.$$

A második derivált értelmezett a függvény értelmezési tartományán, tehát elég ha vizsgáljuk az

$y'' = 0 \Rightarrow 0 \Rightarrow 2\, ln\, x + 3 = 0 \Rightarrow ln\, x - \frac{3}{2} \Rightarrow x = e^{-3/2} \approx 0{,}22$ - kritikus pont, vagyis az

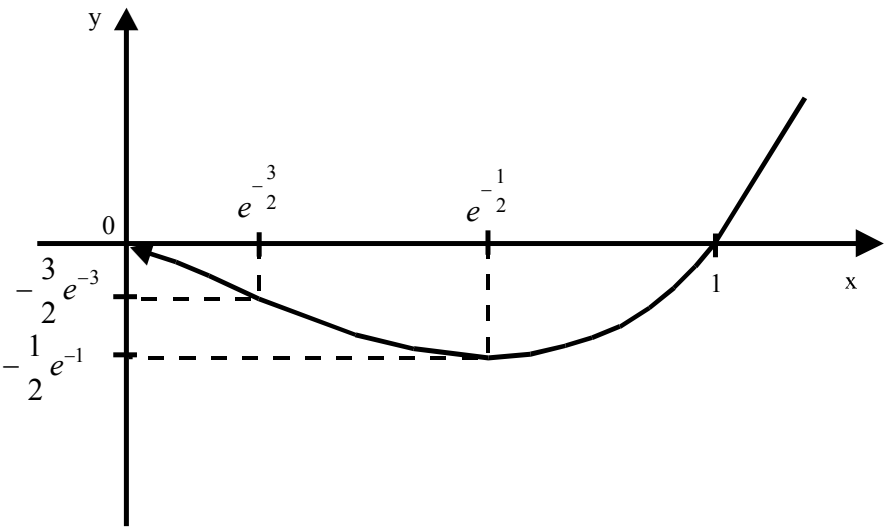
inflexiós pont: $\begin{cases} x = e^{-3/2}; \\ y = \left(e^{-3/2}\right)^2 ln\, e^{-3/2} = -\frac{3}{2}e^{-3} = -\frac{3}{2e^3} \approx -0{,}08, \Rightarrow \left(e^{-3/2}; -\frac{3}{2}e^{-3}\right) \end{cases}$.

A második derivált előjele:



$y''(e) > 0,\ y''\left(e^{-5/2}\right) < 0$. Tehát, a $\left(0; e^{-3/2}\right)$ intervallumon a függvény konkáv, és a $\left(e^{-3/2}; +\infty\right)$ intervallumon konvex.

8. Ábrázoljuk a függvénygörbét (6.3 ábra).



6.3 ábra

7. Határozatlan integrál

Határozatlan integrál tulajdonságai:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$

2. $\int f'(x)dx = f(x) + C.$

3. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx, \quad a \neq 0.$

4. $\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx.$

Az alapintegrálok:

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1).$

2. $\int \frac{dx}{x} = ln|x| + C.$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{ln\, a} + C \qquad (a > 0,\ a \neq 1); \qquad \int e^x dx = e^x + C.$

4. $\int sin\, xdx = -cos\, x + C.$

5. $\int cos\, xdx = sin\, x + C.$

6. $\int \frac{dx}{cos^2 x} = tgx + C.$

7. $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + C.$

8. $\int \frac{dx}{sin\, x} = ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C.$

9. $\int \frac{dx}{cos\, x} = ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$

10. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C \qquad (a \neq 0).$

11. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C \qquad (a \neq 0).$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arcsin\frac{x}{a} + C, \qquad |x| < |a|.$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C, \qquad |x| > |a|.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C.$

15. $\int shxdx = chx + C.$

16. $\int chxdx = shx + C.$

17. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C.$

18. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C.$

OM-7.1

Adja meg az alábbi határozatlan integrálokat:

1. $\int\left(6x^3 - 4\sqrt[5]{x^2} + \frac{5}{x^2}\right)dx;$

2. $\int \frac{(x+2)^2}{\sqrt{x}}dx;$

3. $\int\left(sin\,x + 4^x \cdot 3^x - \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}}\right)dx;$

4. $\int \frac{3 + \sqrt{4 - x^2}}{\sqrt{4 - x^2}}dx;$

5. $\int\left(cos\,4x - 3tg\,2x + e^{5-x}\right)dx;$

6. $\int \sqrt[5]{(7x-2)^3}\,dx;$

7. $\int \frac{(ln\,x)^4}{x}dx;$

8. $\int \frac{(arcsin\,x)^3 - x}{\sqrt{1 - x^2}}dx;$

9. $\int \frac{arctg^5 x}{1 + x^2}dx;$

10. $\int x^2\sqrt{3x^3 + 4}dx;$

11. $\int e^{cosx} \cdot sin\,xdx;$

12. $\int \sin^4 x \cdot \cos xdx$!

ÖM-7.1

Adja meg az alábbi határozatlan integrálokat:

1. $\int 3^x\left(1+\frac{3^{-x}}{sin^2 x}\right)dx;$

2. $\int\left(\frac{2}{\sqrt[4]{x^3}}-\frac{1}{x\sqrt[5]{x}}\right)dx;$

3. $\int\frac{3-2ctg^2 x}{cos^2 x}dx;$

4. $\int(2tgx+3ctgx)^2\,dx;$

5. $\int\frac{dx}{x(1+ln\,x)};$

6. $\int\frac{dx}{cos^2 x\sqrt{2+tgx}};$

7. $\int\frac{4^x\,dx}{\sqrt{1-16^x}};$

8. $\int\frac{2x+(\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}}dx\,!$

IM-7.1

Adja meg az alábbi határozatlan integrálokat:

1. a) $\int\left(3x^2+4\sqrt{x^5}-\frac{5}{x}\right)dx;$ b) $\int\sqrt[3]{(5x-4)}dx;$

c) $\int cos(4x-7)dx;$ d) $\int\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}dx;$

e) $\int\frac{ln^2(x+1)}{x+1}dx;$ f) $\int\frac{cos\,2x}{sin\,2x+3}dx;$

g) $\int\frac{\sqrt{tgx}}{cos^2 x}dx;$ h) $\int\frac{\sqrt[4]{arcsin\,x}}{\sqrt{1-x^2}}dx;$

i) $\int xe^{2-x^2}dx;$ j) $\int \frac{x+2}{3x^2+4}dx$!

2. a) $\int \frac{\sqrt[4]{x}-3x^3+5}{x^2}dx;$ b) $\int \sqrt[5]{4-3x}dx;$

c) $\int sin(10x-7)dx;$ d) $\int x^2\sqrt{x^3+9}dx;$

e) $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{ln(x+2)}};$ f) $\int sin\,3x\,cos^3\,3xdx;$

g) $\int \frac{dx}{sin^2\,x\cdot\sqrt[3]{ctg^2x}};$ h) $\int \frac{dx}{(1+x^2)arctg^3x};$

i) $\int \frac{x}{e^{x^2+4}}dx;$ j) $\int \frac{x-4}{\sqrt{2-9x^2}}dx$!

3. a) $\int\left(\sqrt[7]{x}+\frac{1}{x^3}+6x^4\right)dx;$ b) $\int \sqrt[3]{10x+9}dx;$

c) $\int cos(7x+5)dx;$ d) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}dx;$

e) $\int \frac{\sqrt[3]{ln(2x+1)}}{2x+1}dx;$ f) $\int \frac{cos\,2x}{4-sin\,2x}dx;$

g) $\int \frac{\sqrt[5]{tg^3x}}{cos^2\,x}dx;$ h) $\int \frac{\sqrt[3]{arcctgx}}{1+x^2}dx;$

i) $\int x^2e^{3-2x^3}dx;$ j) $\int \frac{x-4}{25x^2+1}dx$!

4. a) $\int \frac{\sqrt[3]{x}+3x^2-4}{\sqrt{x}}dx;$ b) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{5x+1}};$

c) $\int cos(11x+2)dx;$ d) $\int \frac{x}{2x^2+3}dx;$

e) $\int \frac{\sqrt{ln^5(3x-2)}}{3x-2}dx;$ f) $\int \frac{cos\,4x}{2\,sin^2\,4x}dx;$

g) $\int \frac{\sqrt{ctg^9\,3x}}{sin^2\,3x}dx;$ h) $\int \frac{(arccos\,2x)^7}{\sqrt{1-4x^2}}dx;$

i) $\int \frac{x}{e^{4x^2+1}}dx;$ j) $\int \frac{x+5}{\sqrt{4-25x^2}}dx$!

5. a) $\int\left(\sqrt[5]{x^2}-\frac{1}{x}+5x^4\right)dx;$ b) $\int\sqrt[10]{11-5x}dx;$

c) $\int sin\left(\frac{1}{3}x-2\right)dx;$ d) $\int x^2\left(x^3+3\right)^4dx;$

e) $\int\frac{1+ln(x-1)}{x-1}dx;$ f) $\int\sqrt{cos^3 5x}\cdot sin 5xdx;$

g) $\int\frac{tg^4(x+1)}{cos^2(x+1)}dx;$ h) $\int\frac{(arccos\, x)^3-1}{\sqrt{1-x^2}}dx;$

i) $\int x^2e^{5x^3-2}dx;$ j) $\int\frac{2x+7}{1+9x^2}dx$!

6. a) $\int\frac{\sqrt{x^7}-4+5x^2}{x^3}dx;$ b) $\int\frac{dx}{12x+4};$

c) $\int cos(20x-11)dx;$ d) $\int\frac{x}{\left(x^2+3\right)^4}dx;$

e) $\int\frac{dx}{(x+3)ln^5(x+3)};$ f) $\int\frac{cos\,7x}{\sqrt[3]{sin\,7x}}dx;$

g) $\int\frac{ctg^7 5x}{sin^2 5x}dx;$ h) $\int\frac{4arctgx-x}{1+x^2}dx;$

i) $\int xe^{3-2x^2}dx;$ j) $\int\frac{x-9}{\sqrt{4-36x^2}}dx$!

7. a) $\int\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x^2}-6x^3\right)dx;$ b) $\int\frac{dx}{\sqrt[5]{7x+3}};$

c) $\int sin(5x+7)dx;$ d) $\int x\sqrt[3]{x^2+8}dx;$

e) $\int\frac{\sqrt[3]{ln^7(3x+2)}}{3x+2}dx;$ f) $\int(4+cos\,5x)^2 sin\,5xdx;$

g) $\int\frac{dx}{cos^2 7x\sqrt{tg\,7x}};$ h) $\int\frac{arccos^7 3x-1}{\sqrt{1-9x^2}}dx;$

i) $\int\frac{x^2}{e^{x^3-4}}dx;$ j) $\int\frac{x+1}{2+3x^2}dx$!

8. a) $\int\left(\sqrt[7]{x^3}+\frac{4}{x^2}-3x^5\right)dx;$ b) $\int\sqrt[7]{4-9x}dx;$

c) $\int cos\left(\frac{x}{5}+2\right)dx;$ d) $\int \frac{x}{\sqrt{5+x^2}}dx;$

e) $\int \frac{dx}{(x+5)ln^4(x+5)};$ f) $\int \sqrt{sin^3 2x}\cdot cos\,2xdx;$

g) $\int \frac{\sqrt[5]{ctg^2(x+3)}}{sin^2(x+3)}dx;$ h) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,arcsin^5 x};$

i) $\int x^4 e^{3-x^5}dx;$ j) $\int \frac{3x+2}{\sqrt{2-4x^2}}dx\,!$

9. a) $\int \frac{\sqrt{x}+2-3x^2}{\sqrt[3]{x}}dx;$ b) $\int \frac{dx}{5x+8};$

c) $\int sin(8x+7)dx;$ d) $\int \frac{x}{1+25x^4}dx;$

e) $\int \frac{ln^3(x-4)}{(x-4)}dx;$ f) $\int \frac{sin\,6x}{cos\,6x+4}dx;$

g) $\int \frac{\sqrt[4]{tg^3 5x}}{cos^2 5x}dx;$ h) $\int \frac{\sqrt[3]{arctg^2 x}}{1+x^2}dx;$

i) $\int x^2 e^{9-2x^3}dx;$ j) $\int \frac{2x+5}{1+4x^2}dx\,!$

10. a) $\int\left(\sqrt[5]{x^9}-\frac{5}{x^2}+4x^3\right)dx;$ b) $\int \sqrt[5]{9x-3}dx;$

c) $\int cos(4x-9)dx;$ d) $\int x\sqrt[4]{3+x^2}dx;$

e) $\int \frac{\sqrt[8]{ln^3(2x+3)}}{2x+3}dx;$ f) $\int (sin\,4x+5)^3 cos\,4xdx;$

g) $\int \frac{\sqrt[5]{ctg^3 2x}}{sin^2 2x}dx;$ h) $\int \frac{8x-arctg\,2x}{1+4x^2}dx;$

i) $\int \frac{x}{e^{3x^2+5}}dx;$ j) $\int \frac{3x-1}{\sqrt{1-4x^2}}dx\,!$

11. a) $\int\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^3}+\sqrt[4]{x}\right)dx;$ b) $\int \sqrt[3]{5-6x}dx;$

c) $\int sin(1-2x)dx;$ d) $\int \sqrt[3]{x^3-8}\cdot x^2 dx;$

e) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+ln(x+1)}}$;

f) $\int \frac{cos\,3x}{1+4\,sin\,3x}dx$;

g) $\int \frac{dx}{cos^2 x \cdot tg^7 x}$;

h) $\int \frac{(arccos\,x)^4-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

i) $\int x^3 e^{5x^4-3}dx$;

j) $\int \frac{x-4}{9+x^2}dx$!

12. a) $\int\left(\sqrt[6]{x}+\frac{3}{x^4}-5x^2\right)dx$;

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-7x}}$;

c) $\int cos(4-3x)dx$;

d) $\int \frac{x^2}{\sqrt[4]{1+x^3}}dx$;

e) $\int \frac{x^2+ln\,x^2}{x}dx$;

f) $\int \frac{sin\,5x}{\sqrt{2+cos\,5x}}dx$;

g) $\int \frac{dx}{sin^2 3x \cdot \sqrt[3]{ctg^2 3x}}$;

h) $\int \frac{arcsin^4 3x}{\sqrt{1-9x^2}}dx$;

i) $\int xe^{5-3x^2}dx$;

j) $\int \frac{5+x}{\sqrt{4-9x^2}}dx$!

13. a) $\int\left(\sqrt{x^7}-\frac{4}{x}+3x^6\right)dx$;

b) $\int \frac{dx}{2-5x}$;

c) $\int sin(5x+8)dx$;

d) $\int x\sqrt[4]{3-x^2}\,dx$;

e) $\int \frac{ln^6(4x+1)}{4x+1}dx$;

f) $\int \sqrt{2+4\,sin\,x}\,cos\,xdx$;

g) $\int \frac{dx}{cos^2 x\sqrt{1+tgx}}$;

h) $\int \frac{2+(arccos\,3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}}dx$;

i) $\int xe^{2-x^2}dx$;

j) $\int \frac{5x-2}{x^2+4}dx$!

14. a) $\int \frac{\left(2-\sqrt[3]{x}\right)^2}{x^3}dx$;

b) $\int \frac{dx}{(3x-7)^{10}}$;

c) $\int cos\left(3-\frac{x}{2}\right)dx$;

d) $\int 2^{x^2}\cdot xdx$;

e) $\int \frac{dx}{(x+7)\sqrt[3]{ln^2(x+1)}}$;

f) $\int \frac{cos\,4x}{\sqrt[3]{sin^2\,4x}}dx$;

g) $\int \frac{ctg^5 4x}{sin^2\,4x}dx$;

h) $\int \frac{arctg^4 3x}{1+9x^2}dx$;

i) $\int \frac{x^2}{e^{3x^3-2}}dx$;

j) $\int \frac{2x+1}{\sqrt{1-x^2}}dx$!

15. a) $\int \frac{\left(\sqrt[5]{x^2}+1\right)^2}{\sqrt{x}}dx$;

b $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x}}$;

c) $\int sin(2x+5)dx$;

d) $\int \frac{x^2}{x^6+9}dx$;

e) $\int \frac{\sqrt{ln^5(3x+1)}}{3x+1}dx$;

f) $\int \frac{sin\,6x}{3+2\,cos\,6x}dx$;

g) $\int \frac{\sqrt[7]{tg\,3x}}{cos^2\,3x}dx$;

h) $\int \frac{3-\sqrt{arcsin\,2x}}{\sqrt{1-4x^2}}dx$;

i) $\int x^3 e^{5-x^4}dx$;

j) $\int \frac{3x-1}{x^2+9}dx$.!

16. a) $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}dx$;

b) $\int \sqrt[4]{5x+7}dx$;

c) $\int cos(3x-5)dx$;

d) $\int \frac{x}{\sqrt{3-x^4}}dx$;

e) $\int \frac{ln^6(5x+2)}{5x+2}dx$;

f) $\int \frac{sin\,2x}{4+3\,cos\,2x}dx$;

g) $\int \frac{dx}{sin^2\,4x\sqrt{ctg\,4x}}$;

h) $\int \frac{(arcctg\,2x)^3}{1+4x^2}dx$;

i) $\int \frac{x}{e^{2x^2+3}}dx$;

j) $\int \frac{4x+3}{\sqrt{1-4x^2}}dx$!

17. a) $\int \frac{x^3+2x-3}{\sqrt[4]{x}}dx$;

b) $\int (2x+1)^{15}dx$;

c) $\int sin(3-2x)dx$;

d) $\int \frac{x^4}{\sqrt{3+x^5}}dx$;

e) $\int \frac{dx}{(x-1)ln^3(x-1)}$;

f) $\int \frac{2\sin x}{3+\cos^2 x}dx$;

g) $\int \frac{1+2tg^3 x}{\cos^2 x}dx$;

h) $\int \frac{2+\arcsin^4 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

i) $\int e^{-x^3+1}\cdot x^2 dx$;

j) $\int \frac{1+x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$!

18. a) $\int\left(\sqrt[5]{x^3}-\frac{3}{x}+2x^4\right)dx$;

b) $\int(14x-3)^{1/4}dx$;

c) $\int \cos(9x+4)dx$;

d) $\int \frac{x^2}{x^6+4}dx$;

e) $\int \frac{dx}{(x+3)\sqrt[4]{ln(x+3)}}$;

f) $\int \frac{\cos 2x}{\sqrt{3+\sin 2x}}dx$;

g) $\int \frac{dx}{\sin^2 x(1+ctgx)}$;

h) $\int \frac{dx}{(1+4x^2)arctg^3 2x}$;

i) $\int \frac{x^3}{e^{-x^4+5}}dx$;

j) $\int \frac{2-3x}{\sqrt{1-9x^2}}dx$!

19. a) $\int\left(x^6+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}\right)dx$;

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+1}}$;

c) $\int \sin(4x+5)dx$;

d) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-4x^8}}dx$;

e) $\int \frac{2+ln(5x-3)}{5x-3}dx$;

f) $\int 3\sin 4x(2+\cos 4x)^3 dx$;

g) $\int \frac{\sqrt[3]{tg^2 7x}}{\cos^2 7x}dx$;

h) $\int \frac{\sqrt{\arccos 3x}}{\sqrt{1-9x^2}}dx$;

i) $\int xe^{\frac{x^2}{3}+2}dx$;

j) $\int \frac{2x+7}{1+4x^2}dx$!

20. a) $\int \frac{\sqrt[4]{x}-2x+4}{x^3}dx$;

b) $\int \frac{dx}{(13x-2)^3}$;

c) $\int \cos(3x-5)dx$;

d) $\int x^3\sqrt[7]{2+x^4}dx$;

e) $\int \frac{\sqrt[5]{ln(2x+7)}}{2x+7}dx;$ f) $\int \sqrt[5]{1-sin\,3x}\,cos\,3xdx;$

g) $\int \frac{ctg^{10}2x}{sin^2 2x}dx;$ h) $\int \frac{(arcctg\,5x)^7}{1+25x^2}dx;$

i) $\int x^2 e^{2-4x^3}dx;$ j) $\int \frac{8-2x}{\sqrt{1-x^2}}dx\,!$

21. a) $\int \left(x^5 - \frac{7}{x} + \sqrt[6]{x}\right)dx;$ b) $\int \sqrt{8-3x}dx;$

c) $\int sin(4x+7)dx;$ d) $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{5+3x}};$

e) $\int \frac{dx}{(x-7)\sqrt{ln(x-7)}};$ f) $\int sin\,2x \cdot cos^5 2xdx;$

g) $\int \frac{4+3tg^3 8x}{cos^2 8x}dx;$ h) $\int \frac{\sqrt{arccos\,2x}}{\sqrt{1-4x^2}}dx;$

i) $\int xe^{3-5x^2}dx;$ j) $\int \frac{3+x}{4+25x^2}dx\,!$

22. a) $\int \frac{\left(1-\sqrt[3]{x}\right)^2}{\sqrt[4]{x}}dx;$ b) $\int \frac{dx}{(4x-3)^5};$

c) $\int cos\left(\frac{x}{4}+3\right)dx;$ d) $\int x^2\sqrt{1-x^3}dx;$

e) $\int \frac{ln^4(x+8)}{x+8}dx;$ f) $\int cos\,4x\sqrt[3]{2+sin\,4x}dx;$

g) $\int \frac{\sqrt[7]{ctg^5 2x}}{sin^2 2x}dx;$ h) $\int \frac{dx}{\left(1+9x^2\right)\sqrt[4]{arctg\,3x}};$

i) $\int \frac{x}{e^{x^2+7}}dx;$ j) $\int \frac{3x+5}{\sqrt{9-x^2}}dx\,!$

23. a) $\int \frac{\sqrt[3]{x}-6x+5}{\sqrt{x}}dx;$ b) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{7+4x}};$

c) $\int sin\left(3-\frac{x}{2}\right)dx;$ d) $\int x^5\left(2+3x^6\right)^7 dx;$

e) $\int \frac{\sqrt[4]{ln(x-3)}dx}{(x-3)};$ f) $\int \frac{sin\,5x}{6+3cos\,5x}dx;$

g) $\int \frac{dx}{cos^2 3x\sqrt{4+tg3x}}$;

h) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}\, arcsin^4 2x}$;

i) $\int x^3 e^{8x^4+5}dx$;

j) $\int \frac{53x}{41x^2-2}dx$!

24. a) $\int\left(3x^4+\frac{6}{x}-\sqrt[7]{x^2}\right)dx$;

b) $\int \sqrt[6]{1-2x}dx$;

c) $\int cos\left(5+\frac{x}{3}\right)dx$;

d) $\int \frac{x^4}{\sqrt{8+x^5}}dx$;

e) $\int \frac{dx}{(3x+2)\, ln^8(3x+2)}$;

f) $\int \frac{\cos 7x}{\sqrt[3]{7-\sin 7x}}dx$;

g) $\int \frac{dx}{sin^2 4x ctg^3 4x}$;

h) $\int \frac{\sqrt{arctg\frac{x}{3}}}{\left(9+x^2\right)}dx$;

i) $\int \frac{x^4}{e^{x^5-3}}dx$;

j) $\int \frac{5x+7}{\sqrt{1-4x^2}}dx$!

25.a) $\int\left(\sqrt[8]{x^3}+\frac{6}{x}-\frac{3}{x^4}\right)dx$;

b) $\int \frac{dx}{5x+8}$;

c) $\int sin\left(\frac{x}{5}-2\right)dx$;

d) $\int \frac{x^2}{3+x^3}dx$;

e) $\int \frac{dx}{(5x+6)\, ln^7(5x+6)}$;

f) $\int \frac{sin 5x}{cos^7 5x}dx$;

g) $\int \frac{4-tg^3 2x}{cos^2 2x}dx$;

h) $\int \frac{\sqrt[5]{arcsin 4x}}{\sqrt{1-16x^2}}dx$;

i) $\int x^4 e^{2x^5-3}dx$;

j) $\int \frac{6x+7}{3+4x^2}dx$!

26. a) $\int \frac{\left(4+\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt[3]{x}}dx$;

b) $\int (9-4x)^6 dx$;

c) $\int cos(4x+7)dx$;

d) $\int \frac{5x}{4+8x^2}dx$;

e) $\int \frac{ln^4(7x+9)}{7x+9}dx$;

f) $\int \frac{\cos 3x}{5+2 sin 3x}dx$;

g) $\int \frac{(ctg4x)^7}{sin^2 4x} dx;$ h) $\int \frac{\sqrt[5]{arctg4x}}{1+16x^2} dx;$

i) $\int x^2 e^{9-4x^3} dx;$ j) $\int \frac{2x+5}{\sqrt{1-9x^2}} dx$!

27. a) $\int \frac{5\sqrt{x}+3x-2}{\sqrt[4]{x}} dx;$ b) $\int \frac{dx}{(3x+7)^4};$

c) $\int sin(9-2x)dx;$ d) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx;$

e) $\int \frac{ln^6(x+7)}{x+7} dx;$ f) $\int \frac{\sin 5x}{4-\cos 5x} dx;$

g) $\int \frac{\sqrt[3]{tg^2 4x}}{cos^2 4x} dx;$ h) $\int \frac{(arcsin\, 3x)^7}{\sqrt{1-9x^2}} dx;$

i) $\int \frac{x^3}{e^{6-3x^4}} dx;$ j) $\int \frac{\sin 6x}{8-\cos 3x} dx$!

28. a) $\int \left(\sqrt[7]{x^3} - \frac{5}{x^3} + \frac{1}{x}\right) dx;$ b) $\int \sqrt[6]{4x+1} dx;$

c) $\int cos(3-5x)dx;$ d) $\int x^2 \sqrt[4]{5x^3+2} dx;$

e) $\int \frac{dx}{(3x+4)\sqrt[3]{ln(3x+4)}}$ f) $\int \frac{\cos 2x}{\sqrt{5+sin\, 2x}} dx;$

g) $\int \frac{dx}{sin^2 3x \cdot ctg^5 3x};$ h) $\int \frac{(arctg5x)^3}{1+25x^2} dx;$

i) $\int \frac{x}{e^{7-x^2}} dx;$ j) $\int \frac{\sin 21x}{42-\cos 51x} dx$!

29. a) $\int \frac{\sqrt{x}+4x-3}{\sqrt[5]{x}} dx;$ b) $\int \frac{dx}{7x+9};$

c) $\int sin(3x+4)dx;$ d) $\int x^3(5x^4+3)^2 dx;$

e) $\int \frac{\sqrt[3]{ln^2(5x-2)}}{5x-2} dx;$ f) $\int sin\, x(5+cos\, x)^7 dx;$

g) $\int \frac{dx}{cos^2 x(1+tgx)};$ h) $\int \frac{(arccos\, 3x)^4}{\sqrt{1-9x^2}} dx;$

i) $\int x^3 e^{3x^4+5} dx;$ j) $\int \frac{5x}{4x^2-2} dx$!

30. a) $\int \left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}} + \frac{4}{x} - 3x^2 \right) dx;$ b) $\int (4x+1)^8 dx;$

c) $\int cos(11x-3) dx;$ d) $\int \frac{x^2}{\left(2x^3-4\right)^5} dx;$

e) $\int \frac{\sqrt{ln(11x+2)}}{(11x+2)} dx;$ f) $\int \frac{\cos 3x}{5+9\,sin\,3x} dx;$

g) $\int \frac{\sqrt{ctg^2 2x}}{sin^2 2x} dx;$ h) $\int \frac{\sqrt[3]{arctg 9x}}{1+81x^2} dx;$

i) $\int \frac{x^2}{e^{8x^3-1}} dx;$ j) $\int \frac{3x}{25x^2-2} dx$!

Tipikus változat megoldása

Adja meg az alábbi határozatlan integrálokat:

1. $\int \left(\frac{1}{\sqrt[5]{x}} + 2x^3 - \frac{5}{x} \right) dx.$

Megoldás.

$$\int \left(\frac{1}{\sqrt[5]{x}} + 2x^3 - \frac{5}{x} \right) dx = \int x^{-\frac{1}{5}} dx + 2\int x^3 dx - 5\int \frac{1}{x} dx = \frac{5}{4} x^{\frac{4}{5}} +$$

$$+ 2 \cdot \frac{x^4}{4} - 5\,ln|x| + C = \frac{5}{4}\sqrt[5]{x^4} + \frac{1}{2}x^4 - 5\,ln|x| + C.$$

2. $\int \frac{dx}{(3x+11)^4}.$

Megoldás.

$$\int \frac{dx}{(3x+11)^4} = \int (3x+11)^{-4} dx = \frac{1}{3}\int (3x+11)^{-4} d(3x+11) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x+11)^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{(3x+11)^3} + C.$$

3. $\int sin(4x+13) dx.$

Megoldás.

$$\int sin(4x+13)dx = \frac{1}{4}\int sin(4x+13)d(4x+13) =$$

$$= -\frac{1}{4}cos(4x+13) + C.$$

4. $\int x^5\left(3x^6+7\right)^5 dx.$

Megoldás.

$$\int x^5\left(3x^6+7\right)^5 dx = \frac{1}{6}\int\left(3x^6+7\right)^5 d\left(x^6\right) =$$

$$= \frac{1}{18}\int\left(3x^6+7\right)^5 d\left(3x^6+7\right) = \frac{1}{108}\left(3x^6+7\right)^6 + C.$$

5. $\int \frac{\sqrt[3]{ln(2x+5)}}{2x+5}dx.$

Megoldás.

$$\int \frac{\sqrt[3]{ln(2x+5)}}{2x+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt[3]{ln(2x+5)}}{2x+5}d(2x+5) =$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(ln(2x+5)\right)^{\frac{1}{3}} d\left(ln(2x+5)\right) = \frac{3}{8}\left(ln(2x+5)\right)^{\frac{4}{3}} + C.$$

6. $\int \frac{cos\,3x}{12+4\,sin\,3x}dx.$

Megoldás.

$$\int \frac{cos\,3x}{12+4\,sin\,3x}dx = \frac{1}{3}\int \frac{cos\,3x}{12+4\,sin\,3x}d(3x) = \frac{1}{3}\int \frac{d(sin\,3x)}{12+4\,sin\,3x} =$$

$$= \frac{1}{12}\int \frac{d(4\,sin\,3x+12)}{4\,sin\,3x+12} = \frac{1}{12}ln|4\,sin\,3x+12| + C.$$

7. $\int \frac{\left(ctg3x\right)^5}{sin^2\,3x}dx.$

Megoldás.

$$\int \frac{\left(ctg3x\right)^5}{sin^2\,3x}dx = \frac{1}{3}\int \frac{\left(ctg3x\right)^5}{sin^2\,3x}d(3x) = -\frac{1}{3}\int\left(ctg3x\right)^5 d\left(ctg3x\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}\frac{\left(ctg3x\right)^6}{6} + C = -\frac{1}{18}\left(ctg3x\right)^6 + C.$$

8. $\int \frac{(arctg6x)^7}{1+36x^2}dx.$

Megoldás.

$$\int \frac{(arctg6x)^7}{1+36x^2}dx = \frac{1}{6}\int \frac{(arctg6x)^7}{1+36x^2}d(6x) =$$

$$= \frac{1}{6}\int (arctg6x)^7 d(arctg6x) = \frac{1}{48}(arctg6x)^8 + C.$$

9. $\int x^4 e^{3x^5+13}dx.$

Megoldás.

$$\int x^4 e^{3x^5+13}dx = \frac{1}{5}\int e^{3x^5+13}d(x^5) = \frac{1}{15}\int e^{3x^5+13}d(3x^5+13) =$$

$$= \frac{1}{15}e^{3x^5+13} + C.$$

10. $\int \frac{14x+5}{\sqrt{1-4x^2}}dx.$

Megoldás.

$$\int \frac{14x+5}{\sqrt{1-4x^2}}dx = \int \frac{14x}{\sqrt{1-4x^2}}dx + \int \frac{5}{\sqrt{1-4x^2}}dx =$$

$$= \frac{14}{2}\int \frac{d(x^2)}{\sqrt{1-4x^2}} + 5\int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x)^2}} = -\frac{7}{4}\int (1-4x^2)^{-\frac{1}{2}}d(1-4x^2) +$$

$$+ \frac{5}{2}\int \frac{d(2x)}{\sqrt{1-(2x)^2}} = -\frac{7}{2}\sqrt{1-4x^2} + \frac{5}{2}arcsin2x + C.$$

Irodalomjegyzék

1. *Жалдак М.І., Мігілін Г.О., Деканов С.Й.* Математичний аналіз / – Київ: НПУ ім. М.П. Драгоманова, – 2007.
2. *Rimán János* Matematikai analízis I. kötet / – Eger, – 1998.
3. *Rimán János* Matematikai analízis feladatgyüjtemény I. kötet / – Eger, – 2002.
4. *Kulin Judit, Pákh György* Matematikai analízis feladatokban / Beregszász: PoliPrint Kft, –2007.
5. *Lajkó Károly* Analízis / Debrecen: Matematikai és Informatikai Intézet, – 2000.
6. *Csernyák László* Analízis / Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó, – 2006.
7. *Györfi Jenő* A matematikai analízis elemei / Kolozsvár: Scientia Kiadó, – 2005.
8. *Tóth Zoltán* Analízis Budapest: Századvég Kiadó, – 2007.