

ЗАТВЕРДЖЕНО  
Вченою радою ЗУІ  
Протокол № „3” від „27” квітня 2021 р.  
Ф-КДМ-2

**Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці II**  
**Кафедра математики та інформатики**

Реєстраційний № \_\_\_\_\_

**Кваліфікаційна робота**

**Унітарна підгрупа групових алгебр**  
**Мозговой Іштван Степанович**

Студент IV-го курсу

Освітня програма 014 «Середня освіта (Математика)»

Ступінь вищої освіти: бакалавр

Тема затверджена Вченою радою ЗУІ

Протокол № 7 /27 жовтня 2020 року

Науковий керівник:

**Кудлотяк Чаба Анталович**

**ст. викладач**

Завідувач кафедрою математики та інформатики:

**Кучінка Каталін Йозефівна**

**к. ф.-м. н**

Робота захищена на оцінку \_\_\_\_\_, «\_\_» \_\_\_\_\_ 202\_ року

Протокол № \_\_\_\_\_ / 202\_

**Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці II**

**Кафедра математики та інформатики**

**Кваліфікаційна робота**

**Унітарна підгрупа групових алгебр**

Ступінь вищої освіти: бакалавр

Виконав: студент IV-го курсу

**Мозговой Іштван Степанович**

Освітня програма 014 «Середня освіта (Математика)»

Науковий керівник: **Кудлотяк Чаба Анталович**

**ст. викладач**

Рецензент: **Орос Віктор Михайлович**

**кандидат фізико-математичних наук**

Берегове  
2021

# Зміст

Вступ	6
1 Основні поняття теорії групових кілець	7
2 Група одиниць групового кільця	11
3 Інволюції групових кілець	12
4 Порядок елементів групи одиниць $F_2D_8$	14
5 Порядок елементів групи одиниць $F_2Q_8$	19
Резюме угорською мовою	22
Список використаних джерел	23
Резюме	24

## **II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola**

**Matematika és Informatika Tanszék**

### **A CSOPORTALGEBRÁK UNITÉR RÉSZCSOPORTJAI**

**Szakdolgozat**

**Képzési szint: alapképzés**

**Készítette: Mozgovoj István**

IV. évfolyamos hallgató

**Képzési program:** 014 „Középiskolai oktatás (Matematika)”

**Témavezető: Kudlotyák Csaba**

**adjunktus**

**Recenzens: Orosz Viktor**

**fizika-matematika tudományok kandidátusa**

# Tartalomjegyzék

<b>Bevezetés</b>	<b>6</b>
<b>1. A csoportgyűrű fogalma</b>	<b>7</b>
<b>2. Csoportgyűrűk egységcsoportja</b>	<b>11</b>
<b>3. A csoportgyűrűk involúciói</b>	<b>12</b>
<b>4. <math>F_2D_8</math> egységcsoport elemeinek rendje</b>	<b>14</b>
<b>5. <math>F_2Q_8</math> egységcsoport elemeinek rendje</b>	<b>19</b>
<b>Összegzés</b>	<b>22</b>
<b>Irodalomjegyzék</b>	<b>23</b>
<b>Ukrán nyelvű összegzés</b>	<b>24</b>

## Bevezetés

A csoportalgebra fogalmát Frobenius alkotta meg XX. században. Ez az új algebrai konstrukció igen hasznosnak bizonyult a véges csoportok reprezentációinak tanulmányozása során, így először csak gyakorlati jelentőségük miatt vizsgálták a csoportgyűrűket. A későbbiekben, azonban a vizsgálatok áttevődtek a végtelen csoportok csoportalgebráira. Később három fő kutatási irány alakult ki a csoportalgebráknak: a csoportgyűrűk gyűrűelméleti tulajdonságainak tanulmányozása, a csoportgyűrűk egységcsoportjának vizsgálata, a csoportgyűrűk izomorfia problémája. A csoportgyűrűk egységcsoportjának vizsgálata az 1940-es években az algebrai topológia hatására kezdődött G. Higman kutatásainak köszönhetően és máig igen sok megválaszolatlan problémát tartalmaz.

Célunk meghatározni az egységek rendjét, számát és alakját a kételemű test feletti nyolcad rendű diéder- és kvaterniócsoport csoportalgebrájának egységcsoportjában.

# 1. A csoportgyűrű fogalma

Bódi Béla "Bevezetés a csoportgyűrűk elméletébe"[1] c. könyvében az alábbi definícióját olvashassuk a csoportgyűrűnek.

Legyen  $G$  csoport a szorzás műveletére és  $K$  egységelemes asszociatív gyűrű. Tekintsük az  $f : G \rightarrow K$  függvényeket a  $G$  csoporton értéktartománnyal a  $K$  gyűrűben, amelyek tartója:

$$\text{supp}(f) = \{g \in G \mid f(g) \neq 0\}$$

véges. Jelölje

$$KG = \{u \mid u : G \rightarrow K, \text{supp}(u) \text{ véges}\}$$

azon függvények halmazát, amelyben az  $u$  és  $v$  függvények akkor egyenlők, ha  $v(g) = u(g)$  teljesül minden  $G$ -beli  $g$  elemre. A függvények összegét és szorzatát a  $KG$  halmazban így értelmezzük:

$$(u + v)(g) = u(g) + v(g)$$

és

$$(uv)(g) = \sum_{h \in G} u(h)v(h^{-1}g)$$

azaz szorzatuk a két függvény konvolúciója. A  $KG$  a fentiekben bevezetett műveletekre nézve gyűrűt alkot. Valóban:

- $KG$  Abel-csoport az összeadás műveletére;
- $KG$  félcsoport a szorzás műveletére vonatkozóan;
- $KG$ -ben a szorzás az összeadásra nézve disztributív, azaz bármely  $u, v, w$  elemekre  $u(v + w) = uv + uw$  és

**Definíció.** ([1]) A  $KG$  gyűrűt csoportgyűrűnek, ha  $K$  test, akkor pedig csoportalgebrának nevezzük.

Egyes esetekben, ha a  $KG$  jelölés félreértésre adna okot, a  $K[G]$  jelölést használjuk.

A  $KG$  tárgyalását megelőzően a függvény sokkal áttekinthetőbb alakban való felírására térünk rá.

Jelölje  $u_g$  az  $u$  függvény értékét a  $g$  elemen, ekkor az  $u$  függvény egyértelműen meghatározható a

$$\sum_{g \in G} u_g g$$

alakú formális összeggel, amelyben csak véges sok  $u_g$  együtttható nullától különböző. A formális összegként kezelt függvények esetén az összeadás és a szorzás a  $KG$ -ben következőképpen van értelmezve: legyen

$$x = \sum_{g \in G} a_g g \quad \text{és} \quad y = \sum_{g \in G} b_g g$$

$KG$  tetszőleges két eleme, ahol  $a_g, b_g \in K$ , akkor

$$x + y = \sum_{g \in G} (a_g + b_g) g$$

és

$$xy = \sum_{g \in G} \left( \sum_{h \in G} a_h b_{h^{-1}g} \right) g.$$

Szükségünk lesz a  $K$  gyűrű és a  $KG$  csoportgyűrű elemeinek szorzatára. Az ilyen szorzatokat a következőképpen értelmezzük: ha  $c \in K$  és  $x = \sum_{g \in G} a_g g \in KG$ , akkor

$$c \cdot x = \sum_{g \in G} (ca_g) g \quad \text{és} \quad x \cdot c = \sum_{g \in G} (a_g c) g.$$

A következő összefüggések teljesülnek:

- $(c + d) \cdot x = c \cdot x + d \cdot x$
- $c \cdot (x + y) = c \cdot x + c \cdot y$
- $c \cdot (d \cdot x) = (cd) \cdot x$

bármely  $c, d \in K$  és  $x, y \in KG$  esetén. Ekkor  $KG$  tekinthető, mint baloldali  $K$ -modulus és  $K$  test esetén  $KG$   $K$  feletti vektortér.

**Definíció.** ([1]) Ha  $x = \sum_{g \in G} a_g g$  a  $KG$ -nek nullától különböző eleme, akkor a

$$\text{supp}(x) = \{g \in G \mid a_g \neq 0\}$$

halmazt az  $x$  elem tartójának, és  $\text{supp}(x)$  által generált részcsoportot pedig az  $x$  elem tartócsoportjának nevezzük, és a  $\langle \text{supp}(x) \rangle$  jelölést alkalmazzuk.

A csoportgyűrűk vizsgálatánál gyakran hasznos fogalom az elem hossza: ha  $x = 0$ , akkor az  $x$  elem hossza nulla, egyébként pedig egyenlő a  $\text{supp}(x)$  elemeinek számával, melyre a  $|\text{supp}(x)|$  jelölést használjuk.

Mint ismert, ha  $g$  és  $h$  a  $G$  elemei és  $g = u^{-1}hu$  valamely  $G$ -beli  $u$  elemre, akkor azt mondjuk, hogy  $g$  és  $h$  konjugáltak; jelölje a  $K_g$  a  $G$  csoport  $g$  elemével konjugált elemeit, azaz  $g$ -t tartalmazó konjugált osztályát.

Legyen  $\widehat{K}_a$  a  $K_a$  véges konjugált osztály elemeinek összege, eleme a  $KG$ -nek, amit a továbbiakban osztályösszegnek nevezünk. Nyilván  $g^{-1}\widehat{K}_a g = \widehat{K}_a$  minden  $g$ -re, tehát  $\widehat{K}_a$  centrális.

**1. Lemma.** ([1]) *Legyen  $KG$  egy csoportalgebra a  $K$  test felett. Ekkor a  $KG$  csoportalgebra  $\zeta(KG)$  centruma vektortér és a  $G$ -csoport véges konjugált osztályainak az osztályösszegei a  $\zeta(KG)$  bázisát alkotják.*

A  $KG$  csoportgyűrű vizsgálatánál fontos szerepet töltenek be a  $G$  részcsoportjai által egyértelműen meghatározott bal- és jobboldali ideálok, illetve ideálok. Ezek tulajdonságaira most bővebben kitérünk.

Jelölje  $R_l(G/H)$  és  $R_r(G/H)$  megfelelően a  $G$  csoport  $H$  részcsoportja szerinti baloldali, illetve jobboldali mellékosztályainak olyan teljes reprezentánsrendszerét, amelyek a csoport egységelemét tartalmazzák. Ekkor a következő diszjunkt felbontások léteznek:

$$G = \cup_{u \in R_l(G/H)} uH, \quad (1)$$

$$G = \cup_{u \in R_r(G/H)} Hv \quad (2)$$

**2. Lemma.** ([1]) *Ha  $H$  a  $G$  csoport részcsoportja, akkor  $KG$  bármely eleme egyértelműen felírható a következőképpen:*

$$x = u_1 x_1, u_2 x_2 + \dots + u_s x_s, \quad (3)$$

ahol  $u_i \in R_l(G/H)$ ,  $0 \neq x_i \in KH$  ( $i = 1, \dots, s$ ), továbbá

$$x = y_1 v_1, y_2 v_2 + \dots + y_t v_t, \quad (4)$$

ahol  $v_j \in R_r(G/H)$ ,  $0 \neq y_j \in KH$  ( $j = 1, \dots, t$ ).

Legyen  $H$  a  $G$  részcsoporthja és jelölje  $\mathfrak{S}_l(H)$  a  $KG$  csoportgyűrű összes olyan elemét, amelyek felírhatók a következőképpen:

$$\sum_{h \in H} x_h(h - 1), \quad (x_h \in KG).$$

Látható, hogy  $\mathfrak{S}_l(H)$  a  $KG$ -nek balideálja, amelyet a  $H$  részcsoporthal asszociált (vagy kapcsolt) balideálnak nevezünk.

Az  $\mathfrak{S}_l(H)$  generátorrendszerét a  $\{h - 1 \mid h \in H\}$  elemek alkotják. Hasonlóan határozzuk meg  $KG$ -ben a  $H$  részcsoporthal asszociált  $\mathfrak{S}_r(H)$  jobbideált.

**3. Lemma.** ([1]) Ha a  $KG$  csoportgyűrűben az  $\mathfrak{S}_l(H)$  balideált mint baloldali  $K$ -modulust tekintjük, akkor

$$N = \{u(h - 1) \mid u \in R_l(G/H), 1 \neq h \in H\}$$

elemei az  $\mathfrak{S}_l(H)$   $K$ -modulus bázisát alkotják.

**4. Lemma.** ([1])  $\mathfrak{S}_l(H)$  pontosan akkor kétoldali ideálja  $KG$ -nek, ha  $H$  normális részcsoporthja a  $G$ -nek.

A továbbiakban a  $\mathfrak{S}_l(H)$  kétoldali ideál jelölésére a  $\mathfrak{S}(H)$ -t használjuk.

**5. tétel.** ([1]) Legyen  $\varphi : G \rightarrow G_1$  epimorfizmus, amelynek magja a  $H$  normális részcsoporth, és definiáljuk a  $\tilde{\varphi} : KG \rightarrow KG_1$  leképezést a

$$\tilde{\varphi} \left( \sum_{g \in G} c_g g \right) = \sum_{g \in G} c_g \varphi(g), \quad (c_g \in K)$$

egyenlőség szerint. A  $\tilde{\varphi}$  leképezés a  $KG$  csoportgyűrűt a  $KG_1$  csoportgyűrűre képező homomorfizmus, és ennek magja  $\mathfrak{S}(H)$  ideál.

**6. következmény.** ([1]) Ha  $H$  normális részcsoporthja  $G$ -nek, akkor a  $K[G/H]$  csoportgyűrű izomorf a  $KG/\mathfrak{S}(H)$  faktorgyűrűvel.

**7. következmény.** ([1]) Ha  $x = \sum_{g \in G} c_g$ , akkor a  $KG$  csoportgyűrű eleme és  $\chi(x) = \sum_{g \in G} c_g$ , akkor a  $\chi : KG \rightarrow K$  leképezés a gyűrűk homomorfizmusa.

## 2. Csoportgyűrűk egységcsoportja

Ha a  $G$  csoport tartalmaz  $p$  rendű elemet és  $F$  egy  $p$  karakterisztikájú test, akkor az  $FG$  csoportalgebrát modulárisnak nevezzük.

**Definíció.** ([1]) Az  $FG$  csoportalgebra  $u$  elemére azt mondjuk, hogy egység, ha  $uw = vu = 1$  az  $FG$  valamely elemére. Az  $FG$  összes egysége csoportot alkot, melyet az  $FG$  egységcsoportjának nevezünk, és  $U(FG)$ -vel jelölünk.

A 7. következmény szerint

$$V(FG) = \left\{ \sum_{g \in G} c_g g \in U(FG) \mid \sum_{g \in G} a_g = 1 \right\}$$

részcsoportja az  $U(FG)$  csoportnak. Ezt a  $V(FG)$  csoportot az  $FG$  normalizált egységcsoportjának nevezzük.

[1] Nyilván  $G$  részcsoportja  $V(FG)$ -nek, továbbá  $U(FG) = V(FG) \times U(F)$ . Ezért a továbbiakban elengedhetetlen az egységcsoport tanulmányozásához megvizsgálunk a normalizált egységcsoportot.

### 3. A csoportgyűrűk involúciói

Az  $R$  gyűrű  $*$  :  $R \rightarrow R$  leképezését involúciónak nevezzük, ha bijektív és eleget tesz az alábbi feltételeknek:

$$(x + y)^* = x^* + y^*, \quad (xy)^* = y^*x^*, \quad (x^*)^* = x$$

minden  $R$ -beli  $x, y$  elemekre. Nyilván a  $*$  involúció másodrendű anti-automorfizmus. E fogalom motiválója a mátrixok természetes transzponálása az  $M_n(F)$  mátrixalgebrában az  $F$  test felett, amely fontos szerephez jut az  $M_n(F)$  algebra vizsgálatában.

$$x = \sum_{g \in G} \alpha_g g \rightarrow x^f = \sum_{g \in G} \alpha_g f(g) \eta(g)$$

Definiáljuk a  $*$  :  $FG \rightarrow FG$  leképezést az alábbi módon:

$$* : x = \sum_{g \in G} \alpha_g g \rightarrow x^* = \sum_{g \in G} \alpha_g g^{-1}.$$

**8. tétel.** *Legyen  $F$  test,  $G$  csoport. Ekkor a*

$$* : x = \sum_{g \in G} \alpha_g g \rightarrow x^* = \sum_{g \in G} \alpha_g g^{-1}.$$

*leképezés involúciója lesz az  $FG$  csoportalgebrának.*

*Bizonyítás.* Legyenek  $x = \sum_{g \in G} x_g g$  és  $y = \sum_{g \in G} y_g g$  tetszőleges elemei az  $FG$  csoportalgebrának. Ekkor

$$\begin{aligned} (x + y)^* &= \left( \sum_{g \in G} x_g g + \sum_{g \in G} y_g g \right)^* = \left( \sum_{g \in G} (x_g + y_g) g \right)^* = \sum_{g \in G} (x_g + y_g) g^{-1} = \\ &= \sum_{g \in G} x_g g^{-1} + \sum_{g \in G} y_g g^{-1} = x^* + y^*. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (xy)^* &= \left( \left( \sum_{g \in G} x_g g \right) \left( \sum_{g \in G} y_g g \right) \right)^* = \left( \sum_{g \in G} \left( \sum_{h \in G} x_h y_{h^{-1}g} \right) g \right)^* = \\ &= \sum_{g \in G} \left( \sum_{h \in G} x_h y_{h^{-1}g} \right) g^{-1} = \left( \sum_{g \in G} y_g g^{-1} \right) \left( \sum_{g \in G} x_g g^{-1} \right) = y^* x^*. \end{aligned}$$

$$(x^*)^* = \left( \left( \sum_{g \in G} x_g g \right)^* \right)^* = \left( \sum_{g \in G} x_g g^{-1} \right)^* = \sum_{g \in G} x_g (g^{-1})^{-1} = \sum_{g \in G} x_g g = x.$$

Mivel a  $*$  leképezés eleget tesz az involúció definíciójában szereplő feltételeknek, ezért  $*$  involúciója lesz az  $FG$  csoportalgebrának ■

**Definíció.** ([1]) Az  $R$  gyűrű  $u$  egységét  $*$  unitérnek, vagy egyszerűen unitérnek nevezzük, ha  $u^{-1} = u^*$ .

#### 4. $F_2D_8$ egységcsoport elemeinek rendje

Legyen  $F_2 = \{0, 1\}$  kételemű test és  $D_8 = \langle a, b \mid a^4 = b^2 = 1, ba = a^{-1}b \rangle$  nyolcadrendű diédercsoport.

Ekkor a csoportalgebra minden eleme felírható a következő alakban

$$u = \gamma_0 + \gamma_1a + \gamma_2a^2 + \gamma_3a^3 + \delta_0b + \delta_1ab + \delta_2a^2b + \delta_3a^3b,$$

ahol  $\gamma_i, \delta_i \in F_2$  és  $i = \overline{0, 3}$ .

Legyen

$$u_1 = \gamma_0 + \gamma_1a + \gamma_2a^2 + \gamma_3a^3;$$

$$u_2 = \delta_0 + \delta_1a + \delta_2a^2 + \delta_3a^3.$$

Bevezetjük a következő jelöléseket:

$$\chi(u_1) = \sum_{i=0}^3 \gamma_i = \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3;$$

$$\chi(u_2) = \sum_{i=0}^3 \delta_i = \delta_0 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3.$$

Munkám 11. oldalán már megmutattuk az egységcsoport és a normalizált egységcsoport közötti összefüggést. Ebből tudjuk, hogy  $U(F_2D_8) = V(F_2D_8) \times U(F_2) = V(F_2D_8)$ , ezért  $F_2D_8$  tetszőleges  $u$  egységére igaz, hogy  $\chi(u) = \chi(u_1) + \chi(u_2) = 1$ .

Meghatározzuk az egységcsoport elemeinek a rendjét. Legyen  $u$  tetszőleges eleme az  $U(F_2D_8)$ -nak, ekkor  $u = u_1 + u_2b$ . Az  $u$  másodrendű elem lesz, ha  $u \neq 1$  és  $u^2 = 1$ .

$$\begin{aligned} u^2 &= (u_1 + u_2b)(u_1 + u_2b) \\ &= u_1^2 + u_2u_2^* + (u_1u_2 + u_2u_1^*)b \\ &= u_1^2 + u_2u_2^* + (u_1 + u_1^*)u_2b = 1. \end{aligned} \tag{5}$$

Kiszámoljuk  $u_1$  négyzetét, kihasználva, hogy a kételemű testben  $\gamma_i^2 = \gamma_i$ ,  $\forall \gamma_i \in F_2$ :

$$\begin{aligned} u_1^2 &= (\gamma_0 + \gamma_1a + \gamma_2a^2 + \gamma_3a^3)^2 \\ &= \gamma_0^2 + \gamma_1^2a^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2a^2 \\ &= (\gamma_0 + \gamma_2) + (\gamma_1 + \gamma_3)a^2. \end{aligned} \tag{6}$$

Meghatározzuk az  $u_2 u_2^*$  szorzatot:

$$\begin{aligned}
u_2 u_2^* &= (\delta_0 + \delta_1 a + \delta_2 a^2 + \delta_3 a^3)(\delta_0 + \delta_1 a^3 + \delta_2 a^2 + \delta_3 a) = \\
&= \delta_0^2 + \delta_0 \delta_1 a^3 + \delta_0 \delta_2 a^2 + \delta_0 \delta_3 a + \delta_1 \delta_0 a + \delta_1^2 + \delta_1 \delta_2 a^3 + \delta_1 \delta_3 a^2 + \\
&+ \delta_2 \delta_0 a^2 + \delta_2 \delta_1 a + \delta_2^2 + \delta_2 \delta_3 a^3 + \delta_3 \delta_0 a^3 + \delta_3 \delta_1 a^2 + \delta_3 \delta_2 a + \delta_3^2 = \\
&= \delta_0^2 + \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + (\delta_0 \delta_3 + \delta_1 \delta_0 + \delta_2 \delta_1 + \delta_3 \delta_2) a + \\
&+ (\delta_0 \delta_2 + \delta_1 \delta_3 + \delta_2 \delta_0 + \delta_3 \delta_1) a^2 + (\delta_0 \delta_1 + \delta_1 \delta_2 + \delta_2 \delta_3 + \delta_3 \delta_0) a^3 = \\
&\delta_0 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + (\delta_0 \delta_3 + \delta_1 \delta_0 + \delta_2 \delta_1 + \delta_3 \delta_2)(a + a^3) = \\
&= (\delta_0 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3) + (\delta_0 + \delta_2)(\delta_1 + \delta_3)(a + a^3).
\end{aligned} \tag{7}$$

Figyelembe véve, hogy  $F_2$  karakterisztikája 2, kiszámoljuk a következő kifejezést:

$$\begin{aligned}
u_1 + u_1^* &= (\gamma_0 + \gamma_1 a + \gamma_2 a^2 + \gamma_3 a^3) + (\gamma_0 + \gamma_1 a^3 + \gamma_2 a^2 + \gamma_3 a) = \\
&= 2\gamma_0 + \gamma_1(a + a^3) + 2\gamma_2 a^2 + \gamma_3(a + a^3) = (\gamma_1 + \gamma_3)(a + a^3).
\end{aligned}$$

Felhasználva a kapott eredményt meghatározzuk az alábbi szorzatot:

$$\begin{aligned}
(u_1 + u_1^*)u_2 &= ((\gamma_1 + \gamma_3)(a + a^3))(\delta_0 + \delta_1 a + \delta_2 a^2 + \delta_3 a^3) = \\
&= ((\gamma_1 + \gamma_3)\delta_0)(a + a^3) + ((\gamma_1 + \gamma_3)\delta_1)(a^2 + 1) + \\
&+ ((\gamma_1 + \gamma_3)\delta_2)(a + a^3) + ((\gamma_1 + \gamma_3)\delta_3)(1 + a^2) = \\
&= (\gamma_1 + \gamma_3)(\delta_0 + \delta_2)(a + a^3) + (\gamma_1 + \gamma_3)(\delta_1 + \delta_3)(a^2 + 1) = \\
&= (\gamma_1 + \gamma_3)(\delta_1 + \delta_3 + (\delta_0 + \delta_2)a)(1 + a^2).
\end{aligned} \tag{8}$$

Az (5), a (6), illetve a (7) és a (8) eredményeket alkalmazva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
u_1^2 + u_2 u_2^* &= \gamma_0 + \gamma_2 + (\delta_0 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3) + (\gamma_1 + \gamma_3)a^2 + \\
&(\delta_0 + \delta_2)(\delta_1 + \delta_3)(a + a^3) = \gamma_0 + \gamma_2 + \chi(u_2) + \\
&+ (\gamma_1 + \gamma_3)a^2 + (\delta_0 + \delta_2)(\delta_1 + \delta_3)(a + a^3) = 1.
\end{aligned} \tag{9}$$

és

$$(u_1 + u_1^*)u_2 = (\gamma_1 + \gamma_3)(\delta_1 + \delta_3 + (\delta_0 + \delta_2)a)(1 + a^2) = 0. \tag{10}$$

Tehát, ha  $u$  másodrendű egysége az  $F_2D_8$  csoportalgebrának, akkor (9) és (10) szerint együtthatóinak eleget kell tennie a következő feltételeknek:

$$\begin{cases} \gamma_0 + \gamma_2 + \chi(u_2) + (\gamma_1 + \gamma_3)a^2 + (\delta_0 + \delta_2)(\delta_1 + \delta_3)(a + a^3) = 1, \\ (\gamma_1 + \gamma_3)(\delta_1 + \delta_3 + (\delta_0 + \delta_2)a)(1 + a^2) = 0, \end{cases}$$

azaz

$$\begin{cases} \gamma_0 + \gamma_2 + \sum_{i=0}^3 \delta_i = 1, \\ \gamma_1 + \gamma_3 = 0, \\ (\delta_0 + \delta_2)(\delta_1 + \delta_3) = 0, \\ (\gamma_1 + \gamma_3)(\delta_1 + \delta_3) = 0, \\ (\gamma_1 + \gamma_3)(\delta_0 + \delta_2) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Mivel  $\chi(u) = \chi(u_1) + \chi(u_2) = 1$ , ezért a továbbiakban két esetet vizsgálunk.

1. eset:  $\chi(u_1) = 0$  és  $\chi(u_2) = 1$ . Ekkor (11)-ből következik, hogy

$$\begin{cases} \gamma_0 = \gamma_2, \\ \gamma_1 = \gamma_3, \\ (\delta_0 + \delta_2)(\delta_1 + \delta_3) = 0. \end{cases}$$

Mivel,  $\delta_0 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 1$  ezért  $\delta_1 + \delta_3 = 1 + \delta_0 + \delta_2$ . Kiszámoljuk a következő szorzatot:

$$\begin{aligned} (\delta_0 + \delta_2)(\delta_1 + \delta_3) &= (\delta_0 + \delta_2)(1 + (\delta_0 + \delta_2)) = \\ &= \delta_0 + \delta_2 + (\delta_0 + \delta_2)^2 = \delta_0 + \delta_2 + \delta_0 + \delta_2 = 0, \end{aligned}$$

tehát a  $(\delta_0 + \delta_2)(\delta_1 + \delta_3) = 0$  feltétel  $\chi(u_2) = 1$  esetén mindig teljesül. Az általunk vizsgált esetben tetszőleges másodrendű elem a következő alakú lesz:

$$u = u_1 + u_2b = (\gamma_0 + \gamma_1a)(1 + a^2) + (1 + \delta_1(1 + a) + \delta_2(1 + a^2) + \delta_3(1 + a^3))b.$$

Mivel az  $\gamma_0, \gamma_1, \delta_1, \delta_2, \delta_3$  együtthatók szabadon megválaszthatók, ezért ebben az esetben  $2^5$  darab másodrendű elemet kapunk.

2. eset:  $\chi(u_1) = 1$  és  $\chi(u_2) = 0$ . Ekkor (11)-ből következik, hogy

$$\begin{cases} \gamma_0 = 1 + \gamma_2, \\ \gamma_1 = \gamma_3, \\ (\delta_0 + \delta_2)(\delta_1 + \delta_3) = 0. \end{cases}$$

Mivel,  $\delta_0 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 0$  ezért  $\delta_1 + \delta_3 = \delta_0 + \delta_2$ . Felhasználva ezt az összefüggést, az utolsó feltételrendszer utolsó feltételéből kapjuk, hogy

$$(\delta_0 + \delta_2)(\delta_1 + \delta_3) = (\delta_0 + \delta_2)(\delta_0 + \delta_2) = 0,$$

azaz

$$\delta_0 + \delta_2 = 0 \Rightarrow \delta_0 = \delta_2.$$

Innen következik, hogy

$$\delta_1 = \delta_3.$$

A második esetben tetszőleges másodrendű elem alakja a következő lesz:

$$u = 1 + (\gamma_2 + \gamma_1 a + (\delta_0 + \delta_1 a)b)(1 + a^2).$$

Mivel az  $\gamma_1, \gamma_2, \delta_0, \delta_1$  együtthatók szabadon megválaszthatók, ezért ebben az esetben  $2^4 - 1$  darab másodrendű elemet kapunk.

Tehát az egységcsoport másodrendű elemeinek a száma egyenlő  $2^5 + 2^4 - 1 = 2^4(2 + 1) - 1 = 3 \cdot 2^4 - 1$ -gyel.

A továbbiakban meghatározzuk az egységcsoport negyedrendű elemeit. Az egységcsoport  $u$  eleme negyedrendű elem lesz, ha  $u^2 \neq 1$  és  $u^4 = 1$ . Felhasználva, hogy  $u^2 = u_1^2 + u_2 u_2^* + (u_1 + u_1^*)u_2 b$  és  $u_1^{*2} = u_1^2$  kiszámoljuk tetszőleges egység negyedik hatványát

$$\begin{aligned} u^4 &= (u_1^2 + u_2 u_2^* + (u_1 + u_1^*)u_2 b)^2 = \\ &= (u_1^2 + u_2 u_2^*)^2 + (u_1^2 + u_2 u_2^*)(u_1 + u_1^*)u_2 b + \\ &\quad + (u_1 + u_1^*)u_2 b(u_1^2 + u_2 u_2^*) + (u_1 + u_1^*)u_2 b(u_1 + u_1^*)u_2 b = \\ &= u_1^4 + (u_2 u_2^*)^2 + (u_1^2 + u_2 u_2^*)(u_1 + u_1^*)u_2 b + (u_1 + u_1^*)u_2 (u_1^{*2} + u_2 u_2^*)b + \\ &\quad + (u_1 + u_1^*)u_2 (u_1^* + u_1)u_2^* = u_1^4 + (u_2 u_2^*)^2 + (u_1 + u_1^*)^2 u_2 u_2^*. \end{aligned} \tag{12}$$

Az előző számításokat felhasználva meghatározzuk a következő kifejezéseket:

$$\begin{aligned} u_1^4 &= ((\gamma_0 + \gamma_2) + (\gamma_1 + \gamma_3)a^2)^2 = (\gamma_0 + \gamma_2)^2 + (\gamma_1 + \gamma_3)^2 = \\ &= \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3, \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
(u_2 u_2^*)^2 &= (\delta_0 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + (\delta_0 + \delta_2)(\delta_1 + \delta_3)(a + a^3))^2 = \\
&= (\delta_0 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3) + ((\delta_0 + \delta_2)(\delta_1 + \delta_3)(a + a^3))^2 = \\
&= \delta_0 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + ((\delta_0 + \delta_2)(\delta_1 + \delta_3)a^2 + (\delta_0 + \delta_2)(\delta_1 + \delta_3)a^2) \\
&= \delta_0 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3,
\end{aligned} \tag{14}$$

$$(u_1 + u_1^*)^2 u_2 u_2^* = ((\gamma_1 + \gamma_3)(a + a^3))^2 u_2 u_2^* = (\gamma_1^2 + \gamma_3^2)(a^2 + a^2) u_2 u_2^* = 0 \tag{15}$$

Felhasználva a (12), a (13), a (14) és a (15) összefüggéseket kapjuk, hogy

$$u^4 = \chi(u_1) + \chi(u_2) = 1.$$

Mivel az  $U(F_2 D_8)$  tetszőleges elemének a negyedik hatványának eggyel egyenlő, így az egységcsoport elemeinek a rendje 1, 2, vagy 4 lesz.

## 5. $F_2Q_8$ egységcsoport elemeinek rendje

Legyen  $F_2 = \{0, 1\}$  kételemű test és  $Q_8 = \langle a, b \mid a^4 = b^4 = 1, a^2 = b^2, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$  nyolcadrendű kvaterniócsoport.

Ekkor a csoportalgebra minden eleme felírható a következő alakban

$$u = \gamma_0 + \gamma_1a + \gamma_2a^2 + \gamma_3a^3 + \delta_0b + \delta_1ab + \delta_2a^2b + \delta_3a^3b,$$

ahol  $\gamma_i, \delta_i \in F_2$  és  $i = \overline{0, 3}$ .

Legyen

$$u_1 = \gamma_0 + \gamma_1a + \gamma_2a^2 + \gamma_3a^3;$$

$$u_2 = \delta_0 + \delta_1a + \delta_2a^2 + \delta_3a^3.$$

Bevezetjük a következő jelöléseket:

$$\chi(u_1) = \sum_{i=0}^3 \gamma_i = \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3;$$

$$\chi(u_2) = \sum_{i=0}^3 \delta_i = \delta_0 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3.$$

Az egységcsoport és a normalizált egységcsoport közötti összefüggésből tudjuk, hogy  $U(F_2Q_8) = V(F_2Q_8) \times U(F_2) = V(F_2Q_8)$ , ezért  $F_2Q_8$  tetszőleges  $u$  egységére igaz, hogy  $\chi(u) = \chi(u_1) + \chi(u_2) = 1$ .

Meghatározzuk az egységcsoport elemeinek a rendjét. Legyen  $u$  tetszőleges eleme az  $U(F_2Q_8)$ -nak, ekkor  $u = u_1 + u_2b$ . Az  $u$  másodrendű elem lesz, ha  $u \neq 1$  és  $u^2 = 1$ .

$$\begin{aligned} u^2 &= (u_1 + u_2b)(u_1 + u_2b) \\ &= u_1^2 + u_2u_2^*b^2 + (u_1u_2 + u_2u_1^*)b \\ &= u_1^2 + u_2u_2^*a^2 + (u_1 + u_1^*)u_2b = 1. \end{aligned} \tag{16}$$

A (6), a (7) és a (16) eredményeket alkalmazva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} u_1^2 + u_2u_2^*a^2 &= \gamma_0 + \gamma_2 + (\delta_0 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3)a^2 + (\gamma_1 + \gamma_3)a^2 + \\ (\delta_0 + \delta_2)(\delta_1 + \delta_3)(a + a^3) &= \gamma_0 + \gamma_2 + (\chi(u_2) + \gamma_1 + \gamma_3)a^2 + \\ (\delta_0 + \delta_2)(\delta_1 + \delta_3)(a + a^3) &= 1. \end{aligned} \tag{17}$$

Tehát, ha  $u$  másodrendű egysége az  $F_2Q_8$  csoportalgebrának, akkor (10) és (17) szerint együtthatóinak eleget kell tennie a következő feltételeknek:

$$\begin{cases} \gamma_0 + \gamma_2 + (\chi(u_2) + \gamma_1 + \gamma_3)a^2 + (\delta_0 + \delta_2)(\delta_1 + \delta_3)(a + a^3) = 1, \\ (\gamma_1 + \gamma_3)(\delta_1 + \delta_3 + (\delta_0 + \delta_2)a)(1 + a^2) = 0, \end{cases}$$

azaz

$$\begin{cases} \gamma_0 + \gamma_2 = 1, \\ \gamma_1 + \gamma_3 + \sum_{i=0}^3 \delta_i = 0, \\ (\delta_0 + \delta_2)(\delta_1 + \delta_3) = 0, \\ (\gamma_1 + \gamma_3)(\delta_1 + \delta_3) = 0, \\ (\gamma_1 + \gamma_3)(\delta_0 + \delta_2) = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Mivel  $\chi(u) = \chi(u_1) + \chi(u_2) = 1$ , ezért a továbbiakban két esetet vizsgálunk.

1. eset:  $\chi(u_1) = 0$  és  $\chi(u_2) = 1$ . Ekkor (18)-ből következik, hogy

$$\begin{cases} \gamma_1 + \gamma_3 = 1, \\ (\gamma_1 + \gamma_3)(\delta_1 + \delta_3) = 0, \\ (\gamma_1 + \gamma_3)(\delta_0 + \delta_2) = 0. \end{cases}$$

Az utolsó egyenletrendszerből következik, hogy  $\delta_1 + \delta_3 = 0$  és  $\delta_0 + \delta_2 = 0$ . Ez ellentmond a  $\chi(u_2) = 1$  feltételnek.

2. eset:  $\chi(u_1) = 1$  és  $\chi(u_2) = 0$ . Ekkor (11)-ből következik, hogy

$$\begin{cases} \gamma_0 = 1 + \gamma_2, \\ \gamma_1 = \gamma_3, \\ (\delta_0 + \delta_2)(\delta_1 + \delta_3) = 0. \end{cases}$$

Mivel,  $\delta_0 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 0$  ezért  $\delta_1 + \delta_3 = \delta_0 + \delta_2$ . Felhasználva ezt az összefüggést, az utolsó feltételrendszer utolsó feltételéből kapjuk, hogy

$$(\delta_0 + \delta_2)(\delta_1 + \delta_3) = (\delta_0 + \delta_2)(\delta_0 + \delta_2) = 0,$$

azaz

$$\delta_0 + \delta_2 = 0 \Rightarrow \delta_0 = \delta_2.$$

Innen következik, hogy

$$\delta_1 = \delta_3.$$

A második esetben tetszőleges másodrendű elem alakja a következő lesz:

$$u = 1 + (\gamma_2 + \gamma_1 a + (\delta_0 + \delta_1 a)b)(1 + a^2).$$

Mivel az  $\gamma_1, \gamma_2, \delta_0, \delta_1$  együtthatók szabadon megválaszthatók, ezért ebben az esetben  $2^4 - 1$  darab másodrendű elemet kapunk.

Tehát az egységcsoport másodrendű elemeinek a száma egyenlő  $2^4 - 1$ -gyel.

A továbbiakban meghatározzuk az egységcsoport negyedrendű elemeit. Az egységcsoport  $u$  eleme negyedrendű elem lesz, ha  $u^2 \neq 1$  és  $u^4 = 1$ . Felhasználva, hogy  $u^2 = u_1^2 + u_2 u_2^* a^2 + (u_1 + u_1^*)u_2 b$  és  $u_1^{*2} = u_1^2$  kiszámoljuk tetszőleges egység negyedik hatványát:

$$\begin{aligned} u^4 &= (u_1^2 + u_2 u_2^* a^2 + (u_1 + u_1^*)u_2 b)^2 = \\ &= (u_1^2 + u_2 u_2^* a^2)^2 + (u_1^2 + u_2 u_2^* a^2)(u_1 + u_1^*)u_2 b + \\ &\quad + (u_1 + u_1^*)u_2 b(u_1^2 + u_2 u_2^* a^2) + (u_1 + u_1^*)u_2 b(u_1 + u_1^*)u_2 b = \quad (19) \\ &= u_1^4 + (u_2 u_2^* a^2)^2 + (u_1^2 + u_2 u_2^* a^2)(u_1 + u_1^*)u_2 b + (u_1 + u_1^*)u_2 (u_1^{*2} + u_2 u_2^* a^2)b + \\ &\quad + (u_1 + u_1^*)u_2 (u_1^* + u_1)u_2^* a^2 = u_1^4 + (u_2 u_2^* a^2)^2 + (u_1 + u_1^*)^2 u_2 u_2^* a^2. \end{aligned}$$

Az előző számításokat felhasználva meghatározzuk a következő kifejezéseket:

$$\begin{aligned} (u_2 u_2^* a^2)^2 &= ((\delta_0 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3)a^2 + (\delta_0 + \delta_2)(\delta_1 + \delta_3)(a^3 + a))^2 = \\ &= (\delta_0 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3)a^2 + ((\delta_0 + \delta_2)(\delta_1 + \delta_3)(a^3 + a))^2 = \quad (20) \\ &= \delta_0 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + ((\delta_0 + \delta_2)(\delta_1 + \delta_3)a^2 + (\delta_0 + \delta_2)(\delta_1 + \delta_3)a^2) \\ &= \delta_0 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3, \end{aligned}$$

$$(u_1 + u_1^*)^2 u_2 u_2^* a^2 = ((\gamma_1 + \gamma_3)(a + a^3))^2 u_2 u_2^* a^2 = (\gamma_1^2 + \gamma_3^2)(a^2 + a^2) u_2 u_2^* a^2 = 0 \quad (21)$$

Felhasználva a (13), a (19), a (20) és a (21) összefüggéseket kapjuk, hogy

$$u^4 = \chi(u_1) + \chi(u_2) = 1.$$

Mivel az  $U(F_2 Q_8)$  tetszőleges elemének a negyedik hatványának eggyel egyenlő, így az egységcsoport elemeinek a rendje 1, 2, vagy 4 lesz.

## Összegzés

A csoportgyűrűk elmélete a matematika egy fontos ágazata, amelynek széleskörű az alkalmazása a természettudományokban is. Szakdolgozatom elkészítése során elsajátítottam a csoportgyűrűk elméletének alapvető fogalmait és tételeit. Megismerkedtem a csoportgyűrűk egységcsoportjaira vonatkozó legfontosabb tételekkel és definíciókkal, valamint a csoportgyűrűk involúciói fogalmával.

Az egységcsoport és normalizált egységcsoport összefüggéséből kiindulva, meghatároztam az egységcsoport elemeinek a rendjét és számát. Ehhez a szükséges jelölések bevezetése után, felhasználtam az elem rendjének definícióját és a kételemű test tulajdonságait.

Összességében szakdolgozatom eredményeként sikerült meghatározni az egységek rendjét, számát és alakját a kételemű test feletti nyolcad rendű diéder- és kvaterniócsoport csoportalgebrájának egységcsoportjában.

A kételemű test feletti nyolcad rendű diédercsoportban 47 másodrendű és 80 negyedrendű egység van. Egy másodrendű elem az egységcsoportból

$$u = (\gamma_0 + \gamma_1 a)(1 + a^2) + (1 + \delta_1(1 + a) + \delta_2(1 + a^2) + \delta_3(1 + a^3))b$$

vagy

$$u = 1 + (\gamma_2 + \gamma_1 a + (\delta_0 + \delta_1 a)b)(1 + a^2)$$

alakú lehet, ahol  $\gamma_i, \delta_i \in F_2$ . Tetszőleges egység negyedik hatványa pedig eggyel egyenlő. A nyolcad rendű kvaterniócsoportban 15 másodrendű és 112 negyedrendű egység van. Az egységcsoport másodrendű elemei

$$u = 1 + (\gamma_2 + \gamma_1 a + (\delta_0 + \delta_1 a)b)(1 + a^2)$$

alakúak. Tetszőleges egység negyedik hatványa pedig eggyel egyenlő.

## Hivatkozások

- [1] Bódi Béla "Bevezetés a csoportgyűrűk elméletébe". Kossuth egyetemi kiadó, Debrecen, 2008, 122 old.
- [2] Jennings S.A, "The structure of the group rings of a  $p$ -group over a modular field". Trans. Am. Mat. Soc. 50, 1941, 175-185
- [3] Lombardo-Radice L. "Intorno alle algebre legate di ordine finito", Rend. Semin. Math. Univ., Roma 2 (1938), 312-320
- [4] Passman D., "The algebraic structure of group rings", Wiley-Interscience, 1977.
- [5] Polcino Milies C. and Sehgal S.K. "An introduction to group rings", Kluwer Acad., 2002.

## Резюме

Теорія групових кілець - важливий розділ математики, який широко застосовується в природничих науках. Під час виконання бакалаврської роботи я освоїв основні поняття і теореми теорії групових кілець, познайомився з найважливішими теоремами і означеннями про групу одиниць групових кілець, а також з інволюціями групових кілець.

Взявши до уваги зв'язок між групою одиниць і нормалізованою групою одиниць групового кільця, я знайшов порядок елементів групи одиниць, їх вигляд та кількість. Для цього, після введення необхідних позначень, я використав означення порядку елемента групи та властивості поля із двох елементів.

У підсумку, результатом моєї роботи є визначення порядку, кількості і вигляду елементів групи одиниць дієдральної групи та групи кватерніона восьмого порядку над полем з двох елементів.

У дієдральній групі восьмого порядку над полем із двох елементів 47 одиниць другого порядку і 80 одиниць четвертого порядку. Будь-який елемент другого порядку з групи одиниць можна записати як

$$u = (\gamma_0 + \gamma_1 a)(1 + a^2) + (1 + \delta_1(1 + a) + \delta_2(1 + a^2) + \delta_3(1 + a^3))b$$

або

$$u = 1 + (\gamma_2 + \gamma_1 a + (\delta_0 + \delta_1 a)b)(1 + a^2),$$

де  $\gamma_i, \delta_i \in F_2$ . Четверта степінь довільної одиниці завжди дорівнює одиниці.

У групі кватерніона восьмого порядку над полем із двох елементів 15 одиниць другого порядку і 112 одиниць четвертого порядку. Будь-який елемент другого порядку з групи одиниць можна записати наступним чином:

$$u = 1 + (\gamma_2 + \gamma_1 a + (\delta_0 + \delta_1 a)b)(1 + a^2).$$

Четверта степінь довільної одиниці завжди дорівнює одиниці.

Ім'я користувача:  
Моца Андрій Андрійович

ID перевірки:  
1007785633

Дата перевірки:  
09.05.2021 00:26:29 EEST

Тип перевірки:  
Doc vs Internet

Дата звіту:  
09.05.2021 00:54:42 EEST

ID користувача:  
100006701

Назва документа: Mozgovoj\_Istvan\_Az\_egysegek\_rendjenek\_meghatarozasa

Кількість сторінок: 24 Кількість слів: 5053 Кількість символів: 25369 Розмір файлу: 737.58 KB ID файлу: 1007884565

## 7.52% Схожість

Найбільша схожість: 3.09% з Інтернет-джерелом (<https://pt.scribd.com/doc/268541160/Solution-Arfken-7th>)

7.52% Джерела з Інтернету

92

Сторінка 26

Пошук збігів з Бібліотекою не проводився

## 0% Цитат

Вилучення цитат вимкнене

Вилучення списку бібліографічних посилань вимкнене

## 0% Вилучень

Немає вилучених джерел

## Модифікації

Виявлено модифікації тексту. Детальна інформація доступна в онлайн-звіті.

Замінені символи

87

# Nyilatkozat

Alulírott, Mozgovej István 014. Középiskolai oktatás (Matematika) képzési program hallgatója, kijelentem, hogy a dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskolán, a Matematikai és Informatika Tanszéken készítettem, 014. Középiskolai oktatás (Matematika) BSc diploma megszerzése végett.

Kijelentem, hogy a dolgozatot más szakon korábban nem védtem meg, saját munkám eredménye, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök stb.) használtam fel.

Tudomásul veszem, hogy dolgozatomat a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el.