FELSŐBB ALGEBRA

Gyakorlat támogató jegyzet

Sztojka Miroszláv

Beregszász 2018

Tartalomjegyzék

Előszó 4
1. Komplex számok.
A komplex számok algebrai alakja 5
2. A komplex számok trigonometrikus alakja 9
3. Lineáris egyenletrendszerek. A Gauss-elimináció 14
4. Permutációk. Transzpozíciók 19
5. n–edrendű determinánsok.
A determinánsok tulajdonságai 23
6. Az aldeterminánsés az elem komplementere.
Determinánsok kiszámítása 27
7. A Cramer-szabály 30
8. Mátrix-műveletek. A mátrix inverze 33
9. Az n-dimenziós számtani vektortér.
Vektorrendszerek lineáris összefüggősége 38
10. A mátrix rangja 41
11. Lineáris egyenletrendszer. A Kronecker-Capelli tétel 44
12. Homogén lineáris egyenletrendszerek 47
13. Csoportok. Gyűrűk. Testek 52
14. A polinomok gyűrűje 60
15. A polinomok gyökei 64
16. Irreducibilis polinomok.
Polinomok a racionális számok teste felett 70
17. A lineáris tér bázisa 74
18. Átmeneti mátrix egyik bázisból a másikba 76
19. Műveletek lineáris alterekkel 80

20. Lineáris transzformáció 84
21. Lineáris transzformáció mátrixa egy bázisban 86
22. Műveletek lineáris transzformációkkal 89
23. Lineáris transzformáció nulltere és képtere 92
24. Lineáris transzformáció sajátvektora és sajátértéke 95
25. Lineáris transzformáció sajátvektoraiból álló bázisok 99
26. Lineáris altér ortogonális komplementere 103
27. Gram-Schmidt-féle ortonormalizációs eljárás 105
28. Kvadratikus alak normálalakja 109
29. Pozitív és negatív definit kvadratikus alakok 112
Irodalomjegyzék 114

Előszó

Ez a jegyzet elsődlegesen elsőéves matematikus hallgatók számára készült, e szak tematikáját követi. Az algebrai ismeretek a matematika szinte minden területén és az alkalmazásokban nélkülözhetetlenek. Emellett a lineáris algebra szükségszerűen absztrakt tárgyalása jó átmenetet nyújt az algebrai struktúrákhoz is. A tantárgy elméleti anyagának mély megértéséhez és gyakorlati felhasználásához fontos jelentősége van a feladatok és példák megoldásának.

A segédeszköz minden fejezete két részből áll, az elsőhöz példák tartoznak a feladatok megoldására, a másodikhoz pedig feladatok az önálló munkákhoz. Megjegyezzük a segédeszköz korlátozott terjedelmével kapcsolatban, hogy a feladatok megoldásának példái csak a tanterv legfontosabb kérdéseit tartalmazzák.

1. Komplex számok. Komplex számok algebrai alakja

Példafeladatok

1. Számítsuk ki az alábbi kifejezés értékét: $(2+i)(3-i)+(2+3i)(3+4i)$!

Megoldás. Az algebrai alakban felírt komplex számok szorzására felhasznált tulajdonság alapján

$$(2+i)(3-i)=(2\cdot 3-1\cdot(-1))+(2\cdot(-1)+1\cdot 3)i=7+i,$$

$$(2+3i)(3+4i)=(2\cdot 3-3\cdot 4)+(2\cdot 4+3\cdot 3)i=-6+17i.$$

Továbbá, a komplex számok összeadásának hasonló tulajdonságát felhasználva azt kapjuk, hogy

$$(2+i)(3-i)+(2+3i)(3+4i)=(7+i)+(-6+17i)=1+18i.$$

Megjegyezzük, hogy az algebrai alakban felírt komplex számokat, a komplex számok összeadásának és szorzásának műveletének asszociatív, kommutatív, disztributív tulajdonságának felhasználása által is lehet szorozni. Például,

$$(2+i)(3-i)=2\cdot 3+2\cdot(-i)+i\cdot 3+i\cdot(-i)=6-2i+3i+1=7+i.$$

2. Keressük meg az x és y valós számokat, amelyek kielégítik az $(1+2i)x+(3-5i)y=1-3i$ egyenlőséget!

Megoldás. Nyilvánvaló, hogy az x és y valós számok akkor és csak akkor elégítik ki a feltételezett egyenlőséget, ha kielégítik az $(x+3y)+(2x-5y)i=1-3i$ egyenlőséget. Amennyiben x,y − valós számok, akkor az $x+3y$, és a $2x-5y$ − szintén valós számok. Akkor a komplex számok egyenlőségének feltételéből megkapjuk, hogy $x+3y=1$, $2x-5y=-3$. Az első egyenletből kifejezve az x-et az y-on keresztül $(x=1-3y)$ és a második egyenletbe behelyettesítve az x-re kapott értéket azt kapjuk, hogy $-11y=-5$. Ebből következik, hogy $y=\frac{5}{11}$, $x=-\frac{4}{11}$.

3. Oldjuk meg az

$$\begin{cases}(1+i)x+(1-i)y=1+i\,,\\(1-i)x+(1+i)y=1+3i\end{cases} \qquad (1)$$

lineáris egyenletrendszert!

Megoldás. Az (1) egyenletrendszer első egyenletéből következik, hogy

$$x = \frac{1+i-(1-i)y}{1+i} = \frac{(1+i-(1-i)y)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2+2iy}{2} = 1+iy.$$

Az ismeretlen x-re kapott értéket behelyettesítjük az (1) egyenletrendszer második egyenletébe

$$(1-i)(1+iy)+(1+i)y = 1+3i.$$

Ebből azt kapjuk, hogy $(1-i)+2(1+i)y = 1+3i$. Továbbá

$$y = \frac{4i}{2(1+i)} = \frac{2i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 1+i.$$

Most az $x = 1+i\cdot(1+i) = i$. Ezek szerint $x = i$, $y = 1+i$.

4. Oldjuk meg a $z^2-(2+i)z-1+7i = 0$ egyenletet!

Megoldás. A megadott egyenlet feltételének bal oldala egy z ismeretlentől vett komplex együtthatójú négyzetes polinom. Ezért az adott egyenlet megoldását hasonlóképpen fogjuk keresni, mint a valós együtthatójú másodfokú egyenlet esetében.

Először kiszámoljuk a négyzetes polinom diszkriminánsát

$$D = (2+i)^2 - 4\cdot 1\cdot(-1+7i) = 7-24i.$$

Továbbá, megkeressük a D diszkrimináns négyzetgyökeit. Legyen $x+iy$ – bármelyik ezen gyökök közül, algebrai alakban felírva. Akkor $(x+iy)^2 = D$. Ahonnan $(x^2-y^2)+2xyi = 7-24i$. Tehát

$$\begin{cases} x^2-y^2 = 7\,, \\ 2xy = -24\,. \end{cases} \qquad (2)$$

A (2) rendszer második egyenletéből következik, hogy $y \neq 0$, ezért $x = -\frac{12}{y}$. Behelyettesítve a kapott értéket az x ismeretlen helyébe a következőt kapjuk: $\frac{144}{y^2} - y^2 = 7$. Innen $y^4+7y^2-144 = 0$. Viéta-tétel alapján $y^2 = 9$ vagy $y^2 = -16$. Mivel y – valós szám, ezért $y^2 = 9$, vagyis $y = 3$ vagy $y = -3$. Az $y = 3$ esetben azt kapjuk, hogy $x = -4$. Ha $y = -3$, akkor $x = 4$. Ezek szerint $\sqrt{D} = \{4-3i, -4+3i\}$.

Tehát a feladatban megadott másodfokú egyenlet megoldásai a következők:

$$z_1 = \frac{(2+i)+(4-3i)}{2} = 3-i, \qquad z_2 = \frac{(2+i)+(-4+3i)}{2} = -1+2i.$$

Gyakorlatok

1. Számítsa ki a kifejezések értékét:

a) $(4+2i)+(1-i)+(5+2i)(3-5i)$; b) $\frac{(3+i)(4-3i)}{1+2i}$;

c) $(5-3i)(2+i)+(-1+i)(8+3i)$; d) $\frac{(3-i)(1-4i)}{2-i}$;

e) $(7-2i)(3+4i)+(3+i)(1+2i)$; f) $\frac{(1+3i)(8-i)}{(2+i)^2}$!

2. Számítsa ki az i^{77}; i^{98}; i^n kifejezések értékét, ahol n egy természetes szám!

3. Bizonyítsa be az alábbi egyenlőségeket:

a) $(1+i)^{8n} = 2^{4n}$ $(n \in \mathbb{Z})$; b) $(1+i)^{4n} = (-1)^n 2^{2n}$ $(n \in \mathbb{Z})$!

4. Keresse meg az x és y valós számokat, amelyek kielégítik a következő egyenleteket:

a) $(2+i)x + (1+2i)y = 1-4i$;

b) $(3+2i)x + (1+3i)y = 4-9i$!

5. Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket:

a) $\begin{cases} (3-i)x + (4+2i)y = 2+6i, \\ (4+2i)x - (2+3i)y = 5+4i; \end{cases}$

b) $\begin{cases} (2+i)x + (2-i)y = 6, \\ (3+2i)x + (3-2i)y = 8; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + iy - 2z = 10, \\ x - y + 2iz = 20, \\ ix + 3iy - (1+i)z = 30! \end{cases}$

6. Legyen $\alpha \in \mathbb{C}$ és $\sqrt{\alpha}$ — olyan komplex szám, hogy $\left(\sqrt{\alpha}\right)^2 = \alpha$. Számítsa ki:

a) $\sqrt{2i}$; b) $\sqrt{-15+8i}$; c) $\sqrt{-3-4i}$; d) $\sqrt{-11+60i}$;

e) $\sqrt[4]{-1}$; f) $\sqrt{8+6i}$; g) $\sqrt{1-i\sqrt{3}}$; h) $\sqrt[4]{2-i\sqrt{12}}$!

7. Oldja meg az alábbi egyenleteket:

a) $x^2 - (2+i)x - 1 + 7i = 0$;

b) $x^2 - (3-2i)x + 5 - 5i = 0$;

c) $(2+i)x^2 - (5-i)x + 2 - 2i = 0$;

d) $(1-i)x^2 - (2-16i)x - 23 - 39i = 0$!

8. Bizonyítsa be, hogy:

a) a z komplex szám akkor és csakis akkor lesz valós, ha $\bar{z} = z$;

b) a z komplex szám akkor és csakis akkor lesz tiszta képzetes, ha $\bar{z} = -z$!

9. Bizonyítsa be, hogy a tetszőleges x és y komplex számokra teljesülnek a következők:

a) $\overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y}$; b) $\overline{x \cdot y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$; c) $\overline{-x} = -\bar{x}$; d) $\overline{y^{-1}} = (\bar{y})^{-1}$ $(y \neq 0)$!

10. Keresse meg az összes olyan komplex számot, amely saját négyzetének konjugáltja!

11. Tüntesse fel a komplex síkon azokat a pontokat, amelyek megfelelnek az alábbi számoknak:

$$5, \qquad -2, \qquad -3i, \quad \pm 1 \pm \sqrt{3i}\ !$$

12. Keresse meg azokat a komplex számokat, amelyek megfelelnek:

a) egy négyzet csúcspontjainak, melynek középpontja a koordinátarendszer kezdőpontja, oldalai 1 egységnyi hosszúak, és párhuzamosak a koordinátarendszer tengelyeivel;

b) egy szabályos háromszög csúcspontjainak, melynek középpontja a koordinátarendszer kezdőpontja, oldala párhuzamos az képzetes tengellyel, egyik csúcspontja a negatív valós féltengelyen helyezkedik el és a körülírt kör sugara 1 egységgel egyenlő!

13. Hogyan helyezkednek el a komplex síkon azok a pontok, amelyek megfelelnek az x, y és z komplex számoknak, és melyekre teljesülnek a következők:

$$x + y + z = 0, \qquad x\bar{x} = y\bar{y} = z\bar{z} \neq 0\ ?$$

2. A komplex számok trigonometrikus alakja

Példafeladatok

1. Határozzuk meg a $-1+i$ komplex szám trigonometrikus alakját!

Megoldás. Előbb kiszámoljuk a $-1+i$ szám abszolút értékét:

$$|-1+i| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}.$$

Továbbá, ha $\varphi = \arg(-1+i)$, akkor $\cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Innen $\varphi = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, ahol $k \in \mathbb{Z}$. Tehát, $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ lesz a $-1+i$ szám trigonometrikus alakja.

2. Számítsuk ki az $\left(1-\sqrt{3}i\right)^{-8}$ értékét!

Megoldás. Felírjuk a $z = 1-\sqrt{3}i$ komplex számot trigonometrikus alakban. Hasonlóan az előző példához megmutatjuk, hogy

$$z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Továbbá, Moivre-képlete alapján

$$\left(1-\sqrt{3}i\right)^{-8} = \left(2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right)^{-8} =$$

$$= 2^{-8}\left(\cos\frac{8\pi}{3} + i\sin\frac{8\pi}{3}\right) = \frac{1}{256}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{512} + \frac{\sqrt{3}}{512}i\,.$$

3. A $\cos 5x$ függvényt írjuk fel a $\sin x$-től és $\cos x$-től függő polinom alakjában!

Megoldás. Megvizsgáljuk a $(\cos x + i\sin x)^5$ kifejezést. Moivre-képlete szerint $(\cos x + i\sin x)^5 = \cos 5x + i\sin 5x$. Newton binomiális tételét felhasználva pedig a következőt kapjuk:

$$(\cos x + i\sin x)^5 = \cos^5 x + 5\cos^4 x\cdot i\sin x + 10\cos^3 x\cdot i^2\sin^2 x +$$
$$+10\cos^2 x\cdot i^3\sin^3 x + 5\cos x\cdot i^4\sin^4 x + i^5\sin^5 x =$$
$$= (\cos^5 x - 10\cos^3 x\sin^2 x + 5\cos x\sin^4 x) +$$
$$+(5\cos^4 x\sin x - 10\cos^2 x\sin^3 x + \sin^5 x)i.$$

A kapott egyenlőségek baloldalainak egyenlőségéből következik a jobboldalaik egyenlősége. Felhasználva a komplex számok egyenlőségének feltételeit azt kapjuk, hogy:

$$\cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x \sin^2 x + 5\cos x \sin^4 x\ .$$

4. Számítsuk ki $\sqrt[9]{\dfrac{-1+i}{1-\sqrt{3}i}}$ kifejezés értékét!

Megoldás. Felhasználva az előző példák eredményeit és a trigonometrikus alakban megadott komplex számok oszthatóság tulajdonságát a következőt kapjuk:

$$\frac{-1+i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}{2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}\right).$$

Innen a gyökvonás képletéből következik, hogy:

$$\sqrt[9]{\frac{-1+i}{1-\sqrt{3}i}} = \frac{1}{\sqrt[18]{2}}\left(\cos\frac{\frac{13\pi}{2}+2\pi k}{9} + i\sin\frac{\frac{13\pi}{2}+2\pi k}{9}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[18]{2}}\left(\cos\left(\frac{13+4k}{18}\pi\right) + i\sin\left(\frac{13+4k}{18}\pi\right)\right),$$

ahol $k \in \{0, 1, \dots, 8\}$.

5. Írjuk ki az 1-es szám összes hatodik komplex gyökét (hatodik egységgyököt)! Mutassuk meg, hogy melyek lesznek közülük az 1-es szám primitív hatodik gyökei (hatodik primitív egységgyökök)!

Megoldás. Az előző példa alapján mind a hat hatodik egységgyöke a következő számokkal fejeződik ki:

$$\varepsilon_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1, \qquad \varepsilon_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$\varepsilon_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \qquad \varepsilon_3 = \cos\pi + i\sin\pi = -1,$$

$$\varepsilon_4 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \qquad \varepsilon_5 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Moivre-képletéből következik, hogy $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$ $(k = 0, 1, \dots, 5)$. Amennyiben ε_1 — primitív hatodik gyöke az 1-nek, ezért, mint ismeretes az ε_k $(k \in \{0, 1, \dots, 5\})$ akkor és csakis akkor lesz primitív hatodik egységgyök, ha a k és a 6 számok relatív prímek. A $0, 1, \dots, 5$ számok közül ilyenek az 1 és az 5 . Ezek szerint, primitív hatodik egységgyökök az $\varepsilon_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ és az $\varepsilon_5 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ számok lesznek.

Gyakorlatok

1. Keresse meg az alábbi komplex számok trigonometrikus alakját!

a) -2 ; b) $1 + i$; c) $\sqrt{3} - i$; d) $\sqrt{5} - \sqrt{5}i$; e) $2 + \sqrt{3} + i$;

f) $5i$; g) $1 - i$; h) $1 + \sqrt{3}i$; i) $1 + \frac{\sqrt{3}}{3}i$; j) $\cos\varphi - i\sin\varphi$.

2. Oldja meg az alábbi egyenleteket!

a) $|z| + z = 8 + 4i$; b) $|z| - z = 8 + 12i$.

3. Határozza meg azon pontok mértani helyét a komplex síkon, melyek megfelelnek azoknak a z számoknak, melyek kielégítik az alábbi feltételeket:

a) $1 \le |z| \le 2$; b) $|z - 1 - i| < 1$; c) $\frac{\pi}{6} < \operatorname{Arg} z \le \frac{\pi}{3}$;

d) $|z - 2| \le 1$; e) $0 < \operatorname{Re} iz < 1$; f) $|z - 1| + |z - 1| = 3$.

4. Számítsa ki az alábbi kifejezések értékét!

a) $(1 + i)^{100}$; b) $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{30}$; c) $\left(1 - \frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}$; d) $\left(2 - \sqrt{2} + i\right)^{12}$.

5. Bizonyítsa be, hogy $\left(\sqrt{3} - i\right)^n = 2^n\left(\cos\frac{\pi n}{6} - i\sin\frac{\pi n}{6}\right)$, ahol $n \in \mathbb{N}$!

6. Írja fel a $\sin x$-től és $\cos x$-től függő polinom alakjában az alábbi függvényeket:

a) $\sin 4x$; b) $\cos 6x$; c) $\sin 7x$!

7. Írja ki trigonometrikus alakban az alábbi kifejezések összes gyökeit:

a) $\sqrt[10]{512\left(1-\sqrt{3}i\right)}$; b) $\sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$!

8. Írja ki algebrai alakban az alábbi kifejezéseknek a megfelelő gyökeit:

a) $\sqrt[3]{i}$; b) $\sqrt[4]{8\sqrt{3}i-8}$; c) $\sqrt[4]{-72\left(1-i\sqrt{3}\right)}$; d) $\sqrt{2-2i}$;

e) $\sqrt[4]{-4}$; f) $\sqrt[3]{\frac{8+24i}{3-i}}$; g) $\sqrt[3]{\frac{27-54i}{2+i}}$; h) $\sqrt[4]{-\frac{18}{1+i\sqrt{3}}}$!

9. Oldja meg az alábbi egyenleteket:

a) $(z+1)^n-(z-1)^n=0$; b) $(z+i)^n-(z-i)^n=0$, $(n\in\mathbb{N})$.

10. Írja ki az 1-es szám összes alábbi fokú gyökét:

a) 3; b) 4; c) 8; d) 12!

11. Írja ki az 1-es szám összes alábbi fokú primitív gyökét:

a) 3; b) 4; c) 8; d) 12!

12. Mutassa meg az 1-es szám összes a) 16-odik ; b) 24-edik gyökei közül melyik primitív!

13. Határozza meg az 1-es szám összes n-edik gyökeinek összegét!

14. Legyen ε az 1-es primitív $2n$-edik gyöke. Számolja ki az $1+\varepsilon+\varepsilon^2+\cdots+\varepsilon^{n-1}$ összeget!

15. Keresse meg az 1-es szám összes n-edik gyökének k-ad fokainak összegét!

16. Számítsa ki az 1-es szám összes a) 16-odik ; b) 24-edik primitív gyökeinek összegét!

17. Legyen k és l — természetes relatív prím számok, ε — az 1-es szám k-adik gyöke, és a ξ — pedig az 1-es szám l-edik primitív gyöke. Bizonyítsa be, hogy $\varepsilon\xi$ — az 1-es szám kl-edik primitív gyöke!

18. Megjelöljük $\varphi(n)$-el az 1-es szám összes n-edik primitív gyökeinek a számát. Bizonyítsa be, hogy a $\varphi(kl) = \varphi(k)\varphi(l)$, hogyha k és l relatív prím számok!

19. Jelölje $\varphi(n)$ ugyan azt, mint az előző feladatban. Bizonyítsa be, hogy ha $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_s^{k_s}$, ahol $p_1, p_2, \ldots, p_s$ — különböző relatív prím számok, akkor

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_s}\right) !$$

3. Lineáris egyenletrendszerek. A Gauss-elimináció

Példafeladatok

1. Oldjuk meg Gauss-módszerével az alábbi valós együtthatójú lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3! \end{cases} \quad (1)$$

Megoldás. Előbb elvégezzük az (1)-es rendszer azon elemi átalakításait, hogy az új rendszerben csak egy egyenlet legyen, amely nem nulla együtthatót tartalmaz az x_1 ismeretlen előtt. Ehhez elegendő csupán az (1)-es rendszer második egyenletéhez hozzáadni az első egyenlet -1-szeresét. Innen azt kapjuk, hogy:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1, \\ -5x_2 + 3x_3 - x_4 = 3, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases} \quad (2)$$

Továbbá elvégezzük a (2)-es rendszer azon elemi átalakításait, hogy az új rendszerben, kezdve a második egyenlettől, csupán egy egyenlet legyen, amely nem nulla együtthatót tartalmaz az x_2 ismeretlen előtt. Ehhez felcseréljük a (2)-es rendszerben a második és a harmadik egyenletet:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ -5x_2 + 3x_3 - x_4 = 3, \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases} \quad (3)$$

Ezek után folyamatosan hozzá adjuk a (3)-as rendszer harmadik és negyedik egyenletek, megfelelően az ötszörösét és hétszeresét, a második egyenletnek. Innen azt kapjuk, hogy:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ -2x_3 + 4x_4 = -12, \\ -4x_3 + 8x_4 = -24. \end{cases} \quad (4)$$

Végül a (4)-es rendszer negyedik egyenletéhez hozzáadjuk harmadik egyenletének -2-szeresét:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \quad\quad - 3x_4 = \quad 1, \\ \quad\quad x_2 - \ x_3 \ + \ \ x_4 = - \ \ 3, \\ \quad\quad\quad - 2x_3 \ + 4x_4 = -12, \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad 0 = \quad\ 0. \end{cases} \tag{5}$$

Nyilvánvaló, hogy az (5)-ös rendszer ekvivalens(egyenértékű) a következővel:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \quad\quad - 3x_4 \ = \ \ 1, \\ \quad\quad x_2 - \ x_3 \ + \ \ x_4 = -3, \\ \quad\quad\quad\quad x_3 \ - 2x_4 = \ \ 6. \end{cases} \tag{6}$$

Mivel a (6)-os rendszernek lépcsőzetes alakja van, ezért az egy megoldható rendszer, melynek egynél több megoldása van.

Az utolsó egyenletből azt kapjuk, hogy $x_3 = 6 + 2x_4$. A kapott értéket behelyettesítjük a (6)-os rendszer második egyenletének x_3-as helyébe és kifejezzük az x_2-t:

$$x_2 = -3 - x_4 + x_3 = -3 - x_4 + 6 + 2x_4 = 3 + x_4.$$

Végül, behelyettesítve a kapott x_2 és x_3 értékeket az első egyenletbe kifejezzük az x_1-et:

$$x_1 = 1 + 3x_4 - 3x_2 = 1 + 3x_4 - 9 - 3x_4 = -8.$$

Tehát $x_1 = -8$, $x_2 = 3 + x_4$, $x_3 = 6 + 2x_4$ és a $-8, 3 + c, 6 + 2c, c$ $(c \in \mathbb{R})$ rendszer lesz az adott lineáris egyenletrendszer általános megoldása.

Megjegyzés. Az előző példa megoldása alapján meggyőződhetünk arról, hogy az egyenletrendszerek megoldásainak Gauss-módszerével történő keresése folyamán a rendszer összes elemi átalakítását célszerű elvégezni a neki megfelelő kibővített mátrix fölött. Ha A és B – ekvivalens(egyenértékű) lineáris egyenletrendszerek mátrixai, akkor ezt a következő képpen jelöljük: $A \sim B$. Ezt szemléltetjük a következő példafeladaton.

2. Oldjuk meg Gauss-módszerével az alábbi racionális együtthatójú lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 2x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_3 + \ \ x_4 = \ \ 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = \ \ 2, \\ 5x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - \ \ x_2 + \ x_3 - 3x_4 = \ \ 4! \end{cases} \tag{7}$$

Megoldás. Felírjuk a (7)-es rendszer kibővített mátrixát, amelyben az egyszerűség kedvéért a szabad tagok oszlopát elválasztjuk egy függőleges vonallal:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right).$$

Az előző példafeladattól eltérően most az első oszlop egyetlen eleme sem osztja ezen oszlop többi elemét. Ezért, hogy elkerüljük a tört (nem egész) együtthatókat először is elvégezzük a következő elemi átalakítást: az A mátrix első sorához hozzáadjuk a második -1-szeresét. Így azt kapjuk, hogy:

$$A \sim B = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -3 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right).$$

Ez után folyamatosan hozzáadjuk a B mátrix második, harmadik és negyedik sorához megfelelően annak első sorának három-, öt- és kétszeresét. Innen azt kapjuk, hogy

$$B \sim C = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 7 & -7 & 9 & -1 \\ 0 & 16 & -16 & 22 & -6 \\ 0 & 5 & -5 & 5 & 2 \end{array}\right).$$

Ezek után hozzáadjuk a C mátrix harmadik sorához annak negyedik sorának -3-szorosát. Ezen kívül még felcseréljük a második és harmadik sorokat. Ebből kapjuk, hogy:

$$C \sim D = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & -12 \\ 0 & 7 & -7 & 9 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & 5 & 2 \end{array}\right).$$

Ezek után folyamatosan hozzáadjuk a D mátrix harmadik és negyedik sorához megfelelően annak második sorának -7-szeresét és -5-szörösét. Innen azt kapjuk, hogy

$$D \sim F = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -40 & 83 \\ 0 & 0 & 0 & -30 & 62 \end{array}\right).$$

Végül az F mátrix negyedik sorához hozzáadjuk annak harmadik sorának $-\frac{30}{40}$ -szeresét. Innen kapjuk, hogy:

$$F \sim G = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -40 & 83 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{array}\right).$$

A kapott G mátrix lesz a következő egyenletrendszer kibővített mátrixa

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -1, \\ x_2 - x_3 + 7x_4 = -12, \\ -40x_4 = 83, \\ 0 = -\frac{1}{4}, \end{cases}$$

ahol az utolsó egyenlet baloldala egyenlő nullával viszont a jobboldala nem egyenlő nullával. Az ilyen rendszernek nincs megoldása, vagyis ellentmondó.

Gyakorlatok

Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket:

1. $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4, \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} -9x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7, \\ -4x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 7x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1, \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 11, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 12, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 13, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 14. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 2, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 3. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 2 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 7 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 14 = 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 1 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 1 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 1 = 0! \end{cases}$

Vizsgálja meg az alábbi egyenletrendszerek megoldhatóságát és keresse meg azok általános megoldását a λ paramétertől függően:

11. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4, \\ 4x_1 + 14x_2 + x_3 + 7x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + \lambda x_4 = 7. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 5, \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9, \\ \lambda x_1 - 4x_2 + 9x_3 - 10x_4 = 11. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1. \end{cases}$

14. $\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda^2! \end{cases}$

15. Keresse meg azokat a homogén lineáris egyenletrendszereket, melyeknek az alábbi számrendszerek lesznek a megoldásai:

$(1,1,0,-3,-1)$, $(1,-1,2,-1,0)$, $(4,-2,6,3,-4)$, $(2,4,-2,4,-7)$!

4. Permutációk. Transzpozíciók

Példafeladatok

1. Határozzuk meg az inverziók számát az alábbi rendezésben:

$$1, 3, 5, \dots, 2n-1, 2, 4, 6, \dots, 2n. \qquad (1)$$

Megoldás. Legyen

$$O = \{1, 3, 5, 7, \dots, 2n-1\}, \qquad E = \{2, 4, 6, \dots, 2n\}.$$

Nyilvánvaló, hogy az O halmaz tetszőleges két eleme nem alkot inverziót az (1)-es rendezésben. Hasonlóan nem alkot inverziót az E halmaz két eleme sem ebben a rendezésben. Ezért az inverziók számának kiszámításához az (1)-es rendezésben elegendő megszámolni azon inverziók számát, melyeket az O halmaz összes eleme az E halmaz összes elemével alkot: az 1-es nem alkot inverziót az E halmaz egyetlen elemével sem; a 3-as csak a $2 \in E$ elemmel alkot inverziót; és így tovább; a $2n-1$ a $2, 4, 6, \dots, 2n-2 \in E$ elemekkel alkot inverziót. Tehát az inverziók száma az (1)-es rendezésben egyenlő

$$0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2} \quad .$$

2. Keressük meg az alábbi permutációk szorzatát:

$$\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 5\,4\,6\,1\,3\,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 2\,4\,5\,1\,3\,6 \end{pmatrix}.$$

Megoldás.

$$\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 5\,4\,6\,1\,3\,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 2\,4\,5\,1\,3\,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 4\,1\,3\,5\,6\,2 \end{pmatrix}.$$

3. Adjuk meg páronként idegen ciklusok szorzataként az alábbi permutációt:

$$\delta = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 \\ 8\,1\,3\,6\,5\,7\,4\,2 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. Amennyiben

$$\delta(3) = 3, \dots, \delta(5) = 5;$$
$$\delta(1) = 8, \quad \delta(8) = 2, \quad \delta(2) = 1;$$
$$\delta(4) = 6, \quad \delta(6) = 7, \quad \delta(7) = 4,$$

akkor $\delta = (1\ 8\ 2)(4\ 6\ 7)$.

4. Keressük meg az x permutációt, amely kielégíti az alábbi egyenletet:

$$\alpha x \beta = \gamma, \qquad (2)$$

ahol

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5 \\ 5\ 4\ 1\ 3\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5 \\ 2\ 1\ 3\ 5\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \gamma = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5 \\ 4\ 3\ 2\ 1\ 5 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. Legyen x – olyan permutáció, amely kielégíti a (2)-es egyenletet. Tudjuk, hogy az α és β permutációknak léteznek inverz permutációi, megfelelően α^{-1} és β^{-1}. Akkor, megszorozva baloldalról a (2)-es egyenletet α^{-1}-re, aztán pedig jobboldalról β^{-1}-re, azt kapjuk, hogy $x = \alpha^{-1}\gamma\beta^{-1}$. Fordítva, nyilvánvaló, hogy az $x = \alpha^{-1}\gamma\beta^{-1}$ egyenlet kielégíti a (2)-es egyenletet. Ezért

$$x = \begin{pmatrix} 5\ 4\ 1\ 3\ 2 \\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5 \\ 4\ 3\ 2\ 1\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\ 1\ 3\ 5\ 4 \\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5 \\ 4\ 2\ 5\ 1\ 3 \end{pmatrix}.$$

Gyakorlatok

1. Írja ki azokat a transzpozíciókat, melyek segítségével az $1, 2, 3, 4, 5$ permutációtól eljuthatunk a $2, 5, 3, 4, 1$ permutációhoz!

2. Bizonyítsa be, hogy bármilyen $i_1, i_2, \dots, i_n$ rendezést meg lehet kapni egy bármilyen másik $j_1, j_2, \dots, j_n$ rendezésből nem több, mint $n - 1$ transzpozíció segítségével!

3. Határozza meg az alábbi rendezések paritását:

a) $7, 5, 6, 4, 1, 3, 2$; b) $1, 9, 6, 3, 2, 5, 4, 7, 8$;

c) $2, 4, 6, 8, \dots, 2n, 1, 3, 5, 7, \dots, 2n - 1$!

4. Az $1, 2, 3, \dots, n$ számok melyik rendezésében lesz a legnagyobb az inverziók száma és mennyivel lesz egyenlő?

5. Az $i_1, i_2, \dots, i_n$ rendezésben az inverziók száma egyenlő k-val. Mennyivel egyenlő az inverziók száma az $i_n, i_{n-1}, \dots, i_2, i_1$ rendezésben?

6. Bizonyítsa be, hogy bármely k $(0 \leq k \leq \mathrm{C}_n^2)$ egész számra létezik az $1,2,3,\ldots,n$ számok rendezése, amelyben az inverziók száma k-val egyenlő!

7. Határozza meg az alábbi permutációk szorzatát:

a) $\begin{pmatrix}4&5&1&2&3\\3&2&1&4&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&4&3&2&1\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}2&4&5&3&1\\2&3&4&5&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&5&4&2\end{pmatrix}$!

8. Adja meg páronként idegen ciklusok szorzataként az alábbi permutációkat és határozza meg azok párosságát:

a) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&1&3&6&5&7&4&2\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\5&8&9&2&1&4&3&6&7\end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&\ldots&2n-1&2n\\2&1&4&3&\ldots&2n&2n-1\end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&\ldots&3n-2&3n-1&3n\\2&3&1&5&6&4&\ldots&3n-1&3n&3n-2\end{pmatrix}$!

9. Írja ki az összes heted rendű permutációt, amelyek az alábbi páronként idegen ciklusok szorzataként vannak megadva:

a) $(1\ 5)(2\ 3\ 4)$; b) $(1\ 3)(2\ 5)(4\ 7)$; c) $(7\ 5\ 3\ 1)(2\ 4\ 6)$!

10. Írja fel azt a $2n$-edrendű permutációt, mely $(1\ 2\ 3\ \ldots\ 2n-1\ \ 2n)$ ciklus által van megadva!

11. Határozza meg az alábbi hetedrendű permutációk szorzatát:

a) $[(1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6\ 7)]\cdot[(1\ 4\ 7)(2\ 3\ 5\ 6)]$;

b) $[(1\ 3)(5\ 7)(2\ 4\ 6)]\cdot[(1\ 3\ 5)(2\ 4)(6\ 7)]$!

12. Bizonyítsa be, hogy bármely $\delta \in S_n$ ciklusra, melynek hossza k, teljesül a következő egyenlőség: $\delta^k = e$ (e – egységpermutáció az S_n-ből)!

13. Legyen $\delta \in S_n$ – k hosszúságú ciklus és l – olyan természetes szám, hogy $\delta^l = e$. Bizonyítsa be, hogy l osztódik k-ra!

14. Legyen

$$\alpha = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&4&1&3&2\end{pmatrix},\qquad \beta = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&3&5&4\end{pmatrix},\qquad \gamma = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&3&2&1&5\end{pmatrix}.$$

Oldja meg az alábbi egyenleteket: a) $\alpha\beta x = \gamma$; b) $\beta = \gamma x \alpha$, ahol x – valamilyen ötöd rendű permutáció!

15. Bizonyítsa be, hogy bármely n-edrendű permutáció felírható az alábbi permutációk szorzataként:

a) $(1\ 2), (1\ 3), \dots, (1\ n)$; b) $(1\ 2), (2\ 3), \dots, (n-1\ n)$!

5. n–edrendű determinánsok. A determinánsok tulajdonságai

Példafeladatok

1. Számítsuk ki az alábbi determinánsokat:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$!

Megoldás. A determináns meghatározása alapján:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 8 - 3 = 5;$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 3 \cdot 5 \cdot 7 - 2 \cdot 4 \cdot 9 - 1 \cdot 8 \cdot 6 =$

$= 45 + 84 + 96 - 105 - 72 - 48 = 0.$

2. Válasszuk ki az i és k értékeit úgy, hogy az $a_{1i}a_{32}a_{4k}a_{25}a_{54}$ szorzat pozitív előjellel kerüljön bele egy ötödrendű determinánsba!

Megoldás. Ahhoz, hogy az adott szorzat bekerüljön a determinánsba szükséges, hogy $(i,k) = (1,4)$ vagy $(i,k) = (4,1)$. Felírjuk a szorzandók indexeiből felépített permutációt az első és második esetben:

$$\begin{pmatrix} 1\,3\,4\,2\,5 \\ 1\,2\,4\,5\,3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,3\,4\,2\,5 \\ 4\,2\,1\,5\,3 \end{pmatrix}.$$

Mivel az inverziók száma az első esetben páros, megfelelően $2 + 2 = 4$, a második esetben pedig páratlan, megfelelően $2 + 5 = 7$. Ebből kifolyólag $(i,k) = (1,4)$ és a determináns meghatározása alapján, az $a_{11}a_{32}a_{44}a_{25}a_{54}$ szorzat pozitív előjellel kerül be az ötöd rendű determinánsba.

3. A determináns meghatározása alapján számítsuk ki az alábbi determináns értékét:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}! \qquad (1)$$

Megoldás. Nyilvánvaló, hogyha az egyik tényező a szorzatból, amely belekerül a Δ determinánsba egyenlő 0-val, akkor maga a szorzat is 0 lesz. Ebből kifolyólag megmutatjuk, hogy $\Delta = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

Megvizsgáljuk az $1, 2, \dots, n$ számok egy tetszőleges $i_1, i_2, \dots, i_n$ rendezését és a neki megfelelő $d = a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ szorzatot, amely a Δ determinánshoz tartozik, ahol $a_{ij} = 0$, amikor $i > j$. Ha $i_n \neq n$, akkor $a_{ni_n} = 0$ és így $d = 0$. Legyen $i_n = n$. Továbbá, ha $i_{n-1} \neq n-1$, akkor $i_{n-1} < n-1$. Ezért $a_{n-1\,i_{n-1}} = 0$. Tehát $d = 0$. Legyen $i_{n-1} = n-1$ és így tovább. Ezt a folyamatot folytatva az n-dik lépésben megkapjuk, hogy az $1, 2, \dots, n$ rendezéstől eltérő tetszőleges $i_1, i_2, \dots, i_n$ rendezésre teljesül az $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n} = 0$ egyenlőség. Amennyiben az $1, 2, \dots, n$ rendezés páros, így $\Delta = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

4. Legyen A – n-ed rendű *ferdén szimmetrikus* mátrix, vagyis egy olyan mátrix, melynek a_{ij} elemei kielégítik az $a_{ij} + a_{ji} = 0$ $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ feltételt. Bizonyítsuk be, hogy ha n – páratlan szám, akkor $|A| = 0$.

Megoldás. Nyilvánvaló, hogy az A mátrix alakja a következő:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Hogyha az A mátrix minden sorát megszorozzuk -1-re, akkor eredményül megkapjuk az A mátrix transzponált A^T mátrixát. Az determinánsok tulajdonságaiból következik, hogy $|A^T| = (-1)^n|A|$, valamint, hogy $|A^T| = |A|$. Ebből kifolyólag $|A| = (-1)^n|A|$. Ezért, ha n – páratlan szám, akkor $|A| = -|A|$. Innen $|A| = 0$.

Gyakorlatok

1. Határozza meg, hogy az alábbi szorzatok közül melyek tartoznak a megfelelő rendű determinánsokba és milyen előjellel rendelkeznek:

a) $a_{61}a_{23}a_{45}a_{36}a_{12}a_{54}$; b) $a_{27}a_{36}a_{51}a_{74}a_{25}a_{43}a_{62}$;

c) $a_{12}a_{23}a_{34}\ \cdots\ a_{n-1,n}a_{kk}$ $(1 \leq k \leq n)$; d) $a_{12}a_{23}a_{34}\ \cdots\ a_{n-1,n}a_{n1}$!

2. Válassza ki az i, j, k értékeit úgy, hogy az $a_{51}a_{i6}a_{1j}a_{35}a_{44}a_{6k}$ szorzat negatív előjellel kerüljön bele egy hatod rendű determinánsba!

3. Keresse meg a negyed rendű determináns összes tagját, amely tartalmazza az a_{32} elemet és negatív előjellel kerül a determinánsba!

4. Keresse meg az

$$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$$

determináns összes olyan elemét, amely tartalmazza az : a) x^4 és x^2; b) x^3 és x tényezőket!

5. A determináns meghatározása alapján számítsa ki az alábbi determinánsok értékét:

a) $\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & \dots & a_{3,n-2} & a_{3,n-2} & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 2 & a \\ d & 0 & 0 & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & a_1 \\ 1 & -\lambda & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & -\lambda & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda + a_4 \end{vmatrix}$!

6. Hogyan változik a determináns, ha:

a) az első oszlopát az utolsó helyére tesszük, az összes többit pedig balra toljuk, megőrizve kölcsönös elhelyezkedésüket;

b) a sorait fordított sorrendben írjuk fel?

7. Hogyan változik a determináns, ha:

a) az összes oszlopához, kezdve a másodikkal, hozzáadjuk az előzőt;

b) az összes sorához, kezdve a másodiktól, hozzáadjuk az összes előzőt?

8. Legyen $\Delta = |a_{jk}|$ $(a_{jk} \in \mathbb{C})$ – n-edrendű determináns, mely elemei kielégítik a következő feltételeket: 1) $a_{jk} \in \mathbb{R}$, ha $j > k$; 2) $a_{kj} = ia_{jk}$, ha $j \geq k$ (i – imaginárius). Az n milyen értékeinél lesz a Δ determináns valós szám?

9. Hogyan változik a determináns, ha az összes a_{jk} elemét megszorozzuk c^{j-k} -ra, ahol $c \neq 0$?

10. A 20604, 53227, 25755, 20927 és 289 számok osztódnak 17 –re. Bizonyítsa be, hogy a

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

determináns osztódik 17 –re!

11. Mennyivel egyenlő az a determináns, melyben a páros számú sorok összege egyenlő a páratlan számú sorok összegével?

12. Bizonyítsa be, hogy

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}!$$

13. Számítsa ki a következő determinánst:

$$\begin{vmatrix} a_1+x & x & \dots & x \\ x & a_2+x & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & \dots & a_n+x \end{vmatrix}!$$

6. Az aldeterminánsés az elem komplementere. Determinánsok kiszámítása

Példafeladatok

1. Számítsuk ki az alábbi negyedrendű determinánst

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 7 & 5 \\ 3 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}!$$

Megoldás. Az adott determinánst kifejtjük a harmadik oszlopa szerint. Mivel ezen oszlop két eleme egyenlő nullával azt kapjuk, hogy

$$\Delta = (-2)\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 5 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} + 7\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

A feljebb szereplő harmadrendű determinánsokat kiszámítva kapjuk, hogy

$$\Delta = 2\cdot 49 + 7\cdot 10 = 168.$$

2. Laplace tételének felhasználásával számítsuk ki az alábbi determinánst:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}!$$

Megoldás. Rögzítjük a Δ determináns második és ötödik sorait. Megvizsgáljuk az

$$M_1 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}, \qquad M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}, \qquad M_3 = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$$

aldeterminánsokat, amelyek ezekben a sorokban helyezkednek el. Az összes többi másodrendű aldeterminánsezekben a sorokban egyenlő nullával, mivel nullás oszlopot tartalmaznak.

Kiszámítjuk az M_1, M_2, M_3 aldeterminánsok algebrai komplementereit:

$$(-1)^{s_{M_1}} M_1' = (-1)^{2+5+1+2}\begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 49,$$

$$(-1)^{s_{M_2}} M_2' = (-1)^{2+5+1+4}\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -100,$$

$$(-1)^{s_{M_3}} M_3' = (-1)^{2+5+2+4}\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1.$$

Végül

$$\Delta = \sum_{k=1}^{3} M_k \cdot (-1)^{s_{M_k}} M_k' = 2 \cdot 49 + 1 \cdot (-100) + (-2) \cdot 1 = -4.$$

3. Számítsuk ki a

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & 13 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ -2 & 9 & -8 & 25 \end{vmatrix}$$

determinánst az elemi átalakítások segítségével lépcsőzetes alakhoz hozva!

Megoldás. Hozzáadjuk a Δ determináns második, harmadik és negyedik soraihoz annak első sorát megszorozva megfelelően 3-ra, -1-re és 2-re. Akkor a determinánsok tulajdonságai szerint a Δ determináns értéke nem változik meg. Tehát kapjuk, hogy

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 8 & 4 & 25 \\ 0 & -4 & 7 & 0 \\ 0 & 13 & -2 & 33 \end{vmatrix}.$$

Továbbá hozzáadjuk a kapott determináns második és negyedik sorához annak harmadik sorát megfelelően megszorozva 2-re és 3-ra. Ezután megcseréljük a második és negyedik sorokat. Akkor kapjuk, hogy

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 19 & 33 \\ 0 & -4 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 25 \end{vmatrix}.$$

Ezek után hasonlóan kapjuk, hogy

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 19 & 33 \\ 0 & 0 & 83 & 132 \\ 0 & 0 & 18 & 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 19 & 33 \\ 0 & 0 & 83 & 132 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{301}{83} \end{vmatrix} = 301.$$

Gyakorlatok

Számítsa ki az alábbi determinánsok értékét:

1. $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$!

2. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$!

3. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$!

4. $\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$!

5. $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$!

6. $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & 7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$!

7. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}!$ **8.** $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}!$ **9.** $\begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 51 & 13 & 32 & 40 & 46 \\ 61 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 62 & 20 & 7 & 13 & 52 \\ 80 & 24 & 45 & 57 & 70 \end{vmatrix}!$

10. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}!$ **11.** $\begin{vmatrix} 2 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}!$ **12.** $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}!$

13. $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}!$ **14.** $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & 0 & z \end{vmatrix}!$ **15.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ y_1 & y_2 & \cos\beta & \sin\beta \\ z_1 & z_2 & \cos\gamma & \sin\gamma \end{vmatrix}!$

16. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 9 & 4 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}!$ **17.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 9 & 0 \\ 8 & 1 & 5 & 3 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 27 & 0 \\ 9 & 1 & 5 & 4 & 3 & 10 \end{vmatrix}!$

18. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}!$ **19.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}!$

20. $\begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}!$ **21.** $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -x & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x & x \end{vmatrix}!$

22. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}!$ **23.** $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^n \\ a_{11} & 1 & x & \dots & x^{n-1} \\ a_{21} & a_{22} & 1 & \dots & x^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & 1 \end{vmatrix}!$

7. A Cramer-szabály

Példafeladatok

1. Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert a Cramer-szabály szerint:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 7, \\ 6x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 11, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -2! \end{cases}$$

Megoldás. Kiszámoljuk az adott egyenletrendszer determinánsát:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & -1 \\ 6 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -47.$$

Amennyiben az egyenletrendszer determinánsa nem egyenlő nullával, akkor a Cramer-szabály szerint annak egyetlen megoldása van. Megoldjuk ezen szabály segítségével. Ehhez kiszámítjuk az alábbi determinánsokat:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 4 & 1 \\ 7 & 2 & 5 & -1 \\ 11 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -94, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 & 1 \\ 1 & 7 & 5 & -1 \\ 6 & 11 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -47,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 7 & -1 \\ 6 & 2 & 11 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 5 & 7 \\ 6 & 2 & -1 & 11 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 141.$$

Így az

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 2, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1, \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 0, \qquad x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = -3$$

lesz az adott egyenletrendszer megoldása.

2. Határozzuk meg, hogy a λ paraméter milyen értékeinél lesz az alábbi egyenletrendszer ellentmondó:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_1 - 5x_2 + (\lambda - 10)x_3 = -2, \\ 4x_1 + \lambda x_2 + 3x_3 = 1! \end{cases} \tag{1}$$

Megoldás. Kiszámítjuk az adott rendszer determinánsát:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & \lambda - 10 \\ 4 & \lambda & 1 \end{vmatrix} = -2\lambda^2 + 25\lambda + 93.$$

A Cramer-szabályból adódik, hogy ahhoz hogy az (1)-es egyenletrendszer elentmondó legyen szükséges (de nem elegendő), hogy $\Delta = 0$. A $-2\lambda^2 + 25\lambda + 93$ másodfokú egyenletet megoldva azt kapjuk, hogy $\Delta = 0$ abban az esetben, ha $\lambda = -3$ vagy $\lambda = \frac{31}{2}$.

Előbb megvizsgáljuk azt az esetet, amikor $\lambda = \frac{31}{2}$. Kiszámítjuk a következő determinánst:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & -5 & \frac{31}{2} - 10 \\ 1 & \frac{31}{2} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{703}{4}.$$

Mivel a determináns nem egyenlő nullával, ezért a Cramer-szabály következményéből adódik, hogyha $\lambda = \frac{31}{2}$, akkor az egyenletrendszer ellentmondó.

Ha $\lambda = -3$, akkor meg lehet mutatni, hogy mindhárom determináns, melyeket az (1)-es egyenletrendszer determinánsának megfelelően az első, második és harmadik oszlopának az egyenletrendszer szabadtagjainak oszlopára való cseréjével kapunk, egyenlő nullával. Ezért ebben az esetben, ahhoz hogy meghatározzuk, hogy az (1)-es egyenletrendszer megoldható lesz-e, megoldjuk Gauss-módszerrel:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -5 & -13 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{35}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & -1 & -5 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \end{array}\right).$$

Innen következik, hogy a $\lambda = -3$ esetben az (1)-es egyenletrendszer megoldható.

Így az (1)-es egyenletrendszer akkor és csak akkor lesz ellentmondó, amikor $\lambda = \frac{31}{2}$.

Gyakorlatok

Oldja meg az alábbi egyenletrendszereket a Cramer-szabály szerint:

1. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3! \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 20, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11, \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 40, \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 37! \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x - 5y + 3z + t - 5 = 0, \\ 3x - 7y + 6z - t + 1 = 0, \\ 5x - 9y + 3z + 4t - 7 = 0, \\ 4x - 6y + 3z + t - 8 = 0! \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6 = 0, \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 + 8 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8 = 0! \end{cases}$

5. $\begin{cases} 7x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0! \end{cases}$

6. $\begin{cases} 6x + 5y - 2z + 4t + 4 = 0, \\ 9x - y + 4z - t - 13 = 0, \\ 3x + 4y + 2z - 2t - 1 = 0, \\ 3x - 9y + 2t - 11 = 0! \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x - y - 6z + 3t + 1 = 0, \\ 7x - 4y + 2z - 15t + 32 = 0, \\ x - 2y - 4z + 9t - 5 = 0, \\ x - y + 2z - 6t + 8 = 0! \end{cases}$ **8.** $\begin{cases} 2x + y + 4z + 8t = -1, \\ x + 3y - 6z + 2t = 3, \\ 3x - 2y + 2z - 2t = 8, \\ 2x - y + 2z = 4! \end{cases}$

9. Ellenőrizze le, hogy az $1, 1, 1, 1$ számrendszer megoldása lesz-e a következő egyenletrendszernek:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 11x_3 - 13x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 2x_4 = 0, \\ 13x_1 - 25x_2 + x_3 + 11x_4 = 0! \end{cases}$$

Számítsa ki az egyenletrendszer determinánsát!

10. Oldja meg az x_1, x_2, x_3 ismeretlenektől függő alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x_1 + \alpha_1 x_2 + \alpha_1^2 x_3 = \beta_1, \\ x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_2^2 x_3 = \beta_2, \\ x_1 + \alpha_3 x_2 + \alpha_3^2 x_3 = \beta_3, \end{cases}$$

ahol $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – páronként különböző valós számok; $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$.

8. Mátrix-műveletek. A mátrix inverze

Példafeladatok

1. Keressük meg az A és B mátrixok szorzatát, ha

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}!$$

Megoldás:

$$AB=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a+b+c & a^2+b^2+c^2 & b^2+2ac \\ a+b+c & b^2+2ac & a^2+b^2+c^2 \\ 3 & a+b+c & a+b+c \end{pmatrix}.$$

2. Számítsuk ki az $AB-BA$-t, ha

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Megoldás:

$$AB-BA=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -3 & 7 & 2 \\ 6 & 8 & 4 \\ -1 & 11 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 7 & 11 & 9 \\ 0 & -6 & 0 \\ 6 & 6 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -10 & -4 & -7 \\ 6 & 14 & 4 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

3. Keressük meg az összes olyan mátrixot, melyek kommutálnak (felcserélhetőek a szorzás műveltre) az $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixszal!

Megoldás. Meg kell keresnünk az összes olyan X mátrixot, melyre $AX=XA$. A mátrixok szorzásának meghatározásából az következik, hogy az X másodrendű négyzetes mátrix kell, hogy legyen. Legyen

$$X=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

Akkor az $AX=XA$ a következő alakban írjuk fel:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Innen

$$\begin{pmatrix} x_3 & x_4 \\ x_1+x_3 & x_2+x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_2 & x_1+x_2 \\ x_4 & x_3+x_4 \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

A mátrixok egyenlőségének meghatározásából és az (1)-ből következik, hogy

$$\begin{cases} x_3 = x_2, \\ x_4 = x_1 + x_2, \\ x_1 + x_3 = x_4, \\ x_2 + x_4 = x_3 + x_4. \end{cases}$$

Így az X mátrix x_1, x_2, x_3, x_4 elemei egy olyan számrendszert alkotnak, amely az alábbi lineáris egyenletrendszer megoldása lesz:

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Visszafelé is igaz. Ezen rendszer minden megoldása egy másodrendű mátrixot határozz meg, amely kommutál az A mátrixszal.

Megoldva ezt a lineáris egyenletrendszert Gauss-módszere szerint, azt kapjuk, hogy $(b-a, a, a, b)$ lesz annak általános megoldása $(a, b \in \mathbb{R})$.

Tehát minden mátrix, melynek az alábbi és csakis az:

$$X = \begin{pmatrix} b-a & a \\ a & b \end{pmatrix}$$

alakja fog az a és b bármilyen valós értéke mellett kommutálni az A mátrixszal.

4. Keressük meg az alábbi mátrix inverzét

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}!$$

Megoldás. Először kiszámoljuk az A mátrix determinánsát:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Így az A mátrix nem elfajuló, tehát létezik inverz mátrixa. Megkeressük azt. Ehhez kiszámítjuk az A mátrix a_{ij} elemeinek A_{ij} algebrai komplementereit, melyek az i-edik sor és j-edik oszlop metszetén találhatóak $(i, j = 1,2,3)$:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -6,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3, \qquad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4.$$

Akkor

$$A^{-1} = |A|^{-1}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

5. Keressük meg a következő mátrix inverzét

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}!$$

Megoldás. Az előző példától eltérve ebben az esetben az inverz mátrix meghatározásához annak definícióját fogjuk felhasználni. Legyen

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix}$$

az A mátrix inverze, vagyis $AX = E$ és $XA = E$, ahol E – negyedrendű egységmátrix. Az első egyenlőségből kapjuk, hogy

$$\begin{cases} 2x_{1i} + x_{2i} = \delta_{1i}, \\ 3x_{1i} + 2x_{2i} = \delta_{2i}, \\ x_{1i} + x_{2i} + 3x_{3i} + 4x_{4i} = \delta_{3i}, \\ 2x_{1i} - x_{2i} + 2x_{3i} + 3x_{4i} = \delta_{4i} \end{cases} \qquad (i = 1,2,3,4),$$

ahol δ_{kl} – Kronecker-szimbólum, vagyis

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{ha } k = l; \\ 0, & \text{ha } k \neq l. \end{cases}$$

Így az X mátrix i-edik oszlopa a lineáris egyenletrendszer megoldása lesz, melynek mátrixa egybeesik az A mátrixszal, valamint a szabad tagok oszlopa – az E egységmátrix i-edik oszlopával $(i = 1,2,3,4)$. Ezeket a rendszereket Gauss-módszerével oldjuk meg. Amennyiben ezen rendszerek mátrixai egybeesnek, úgy egyidejűleg fogjuk őket megoldani:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & -8 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -9 & -12 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -5 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 8 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 19 & -3 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 8 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -8 & 5 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 8 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 8 & -5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -23 & 14 & -2 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&3&0&92&-56&9&-12\\0&1&6&0&183&-112&18&-24\\0&0&1&0&31&-19&3&-4\\0&0&0&1&-23&14&-2&3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&2&-1&0&0\\0&1&0&0&-3&2&0&0\\0&0&1&0&31&-19&3&-4\\0&0&0&1&-23&14&-2&3\end{array}\right).$$

Ezek szerint kapjuk, hogy:

$$A^{-1}=X=\begin{pmatrix}2&-1&0&0\\-3&2&0&0\\31&-19&3&-4\\-23&14&-2&3\end{pmatrix}.$$

Gyakorlatok

Számítsa ki az alábbi mátrixok szorzatát:

1. $\begin{pmatrix}3&-2\\5&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&4\\2&5\end{pmatrix}$!

2. $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}$!

3. $\begin{pmatrix}2&-3\\4&-6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9&-6\\6&-4\end{pmatrix}$!

4. $\begin{pmatrix}4&3\\7&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-8&13\\3&-16\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7&3\\2&1\end{pmatrix}$!

5. $\begin{pmatrix}1&-3&2\\3&-4&1\\2&-5&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&5&6\\1&2&5\\1&3&2\end{pmatrix}$!

6. $\begin{pmatrix}5&8&-4\\6&9&-5\\4&7&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&2&5\\4&-1&3\\9&6&5\end{pmatrix}$!

7. $\begin{pmatrix}4&-1\\5&-2\end{pmatrix}^5$!

8. $\begin{pmatrix}2&-1\\3&-2\end{pmatrix}^n\cdot\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}^n$!

9. $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^n$!

10. $\begin{pmatrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{pmatrix}^n$!

11. $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^n$!

12. Hogyan változik az A és B mátrixok AB szorzata, ha:

a) az A mátrix i-edik és j-edik sorát megcseréljük;

b) az A mátrix i-edik sorához hozzáadjuk a j-edik sor α-szorosát;

c) a B mátrix i-edik és j-edik oszlopát megcseréljük;

d) a B mátrix i-edik oszlopához hozzáadjuk j-edik oszlop α-szorosát?

13. A négyzetes mátrix *spurjának*(*nyomának*) nevezzük azon elemeinek összegét, melyek a mátrix főátlóján helyezkednek el. Bizonyítsa be, hogy az AB szorzat spurja egyenlő a BA szorzat spurjával!

14. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges n-edrendű A és B négyzetes mátrixokra $AB-BA\neq E$, ahol E – n-edrendű egységmátrix!

15. Legyenek A és B – azonos rendű mátrixok. Bizonyítsa be, hogy $AB=BA$ akkor és csak akkor, ha a következő egyenlőségek közül az egyik igaz:

a) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$; b) $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$!

16. Legyen $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$. Bizonyítsa be, hogy

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = 0,$$

ahol E, 0 – megfelelően másodrendű egység- és nullás mátrixok!

17. Keresse meg az összes olyan másodrendű mátrixot, melyeknek négyzete nullás mátrixszal egyenlő!

18. Keresse meg az összes olyan másodrendű mátrixot, melyeknek négyzete egységmátrixszal egyenlő!

19. Keresse meg az összes olyan mátrixot, melyek kommutálnak az A mátrixszal, ha:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$!

Keresse meg az alábbi mátrixok inverzét:

20. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$! **21.** $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$! **22.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$!

23. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$! **24.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$!

25. Oldja meg az alábbi mátrixegyenletet:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}!$$

9. Az n-dimenziós számtani vektortér. Vektorrendszerek lineáris összefüggősége

Példafeladatok

1. Határozzuk meg, hogy lineárisan összefüggő e az alábbi vektorrendszer:

$$a_1 = (2,-3,1), \qquad a_2 = (3,-1,5), \qquad a_3 = (1,-4,3)!$$

Megoldás. Legyenek $\gamma_1,\ \gamma_2, \gamma_3$ – tetszőleges valós számok. Megvizsgáljuk a következő lineáris kombinációt:

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \gamma_3 a_3 = (2\gamma_1 + 3\gamma_2 + \gamma_3, -3\gamma_1 - \gamma_2 - 4\gamma_3, \gamma_1 + 5\gamma_2 + 3\gamma_3).$$

Ez a lineáris kombináció akkor és csak akkor lesz egyenlő nullás vektorral, ha igazak az alábbi egyenlőségek:

$$2\gamma_1 + 3\gamma_2 + \gamma_3 = 0,$$
$$-3\gamma_1 - \gamma_2 - 4\gamma_3 = 0,$$
$$\gamma_1 + 5\gamma_2 + 3\gamma_3 = 0,$$

vagyis az $a_1,\ a_2,\ a_3$ vektorrendszer akkor és csak akkor lesz lineárisan összefüggő, ha megfelelően az $a_1,\ a_2,\ a_3$ vektorokkal egyenlő oszlopokat tartalmazó mátrixszal rendelkező homogén lineáris egyenletrendszernek nem csak nullás megoldása van. Megoldjuk ezt az egyenletrendszert:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -4 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & 0 \\ 0 & 14 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right).$$

Tehát a rendszernek csak nullás megoldása van, ezért a feltételben megadott $a_1,\ a_2,\ a_3$ vektorrendszer lineárisan független.

2. Bizonyítsuk be, hogy két egyforma vektort tartalmazó vektorrendszer lineárisan összefüggő lesz!

Megoldás. Megvizsgáljuk a feltételnek megfelelő vektorrendszer egyik részrendszerét, amely két egyforma a, a vektorból áll. Ez a részrendszer lineárisan összefüggő, mivel az $1, -1$ nullától eltérő számokra az a, a vektorok lineáris kombinációja nullás vektorral egyenlő, vagyis $1 \cdot a + (-1) \cdot a = \bar{0}$.

Tehát a kezdeti vektorrendszer is lineárisan összefüggő, mivel a részrendszere lineárisan összefüggő vektorrendszer.

3. Keressük meg az alábbi vektorrendszer összes bázisát:

$$a_1 = (1,2,0,0), \qquad a_2 = (1,2,3,4), \qquad a_3 = (3,6,0,0)!$$

Megoldás. Nyilvánvaló, hogy az a_3 vektor arányos az a_1 vektorral ($a_3 = 3a_1$). Hasonlóan az előző példához bizonyítható, hogy az a_1, a_2, a_3 vektorrendszer lineárisan összefüggő. Vagyis a rendszer rangja kisebb háromnál.

Megvizsgáljuk az a_1, a_2 vektorokból álló részrendszert. Egyértelmű, hogy ezen vektorok lineáris kombinációja

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 = (\gamma_1 + \gamma_2, 2\gamma_1 + 2\gamma_2, 3\gamma_2, 4\gamma_2)$$

akkor és csak akkor egyenlő nullás vektorral, ha $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Tehát, az a_1, a_2 részrendszer lineárisan független. Emellett az a_1, a_2, a_3 vektorok mindegyike lineárisan kifejezhető ezen részrendszer vektorai által:

$$a_1 = 1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3,$$
$$a_2 = 0 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3,$$
$$a_3 = 3 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3.$$

Ebből az következik, hogy az a_1, a_2 vektorok részrendszere az a_1, a_2, a_3 rendszer bázisa lesz. Vagyis ennek a rendszernek a rangja egyenlő kettővel.

Ezért az a_1, a_2, a_3 rendszer összes bázisának megkereséséhez elegendő leellenőrizni, hogy az a_1, a_3 és a_2, a_3 részrendszerek bázisai lesznek-e a rendszernek. Az első nyilvánvalóan lineárisan összefüggő. A másodikra pedig egyszerű megmutatni, hogy bázis lesz.

Gyakorlatok

1. Keresse meg az alábbi vektorok $3a_1 + 5a_2 - a_3$ lineáris kombinációját

$$a_1 = (4,1,3,-2), \quad a_2 = (1,2,-3,2), \quad a_3 = (16,9,1,-3)!$$

2. Határozza meg az x és y vektorokat az alábbi egyenletekből:

a) $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4x = \bar{0}$, b) $3(a_1 - y) + 2(a_2 + y) = 4(a_3 - y)$,

ahol $a_1 = (5,-8,-1,2)$, $a_2 = (2,-1,4,-3)$, $a_3 = (-3,2,-5,4)$.

Határozza meg, hogy lineárisan összefüggőek e az alábbi vektorrendszerek:

3. $a_1 = (5,4,3)$, $a_2 = (3,3,2)$, $a_3 = (8,1,3)$.

4. $b_1 = (2,-4,1)$, $b_2 = (0,5,-6)$, $b_3 = (1,-2,4)$.

5. $c_1 = (4,-5,2,6)$,
$c_2 = (2,-2,1,3)$,
$c_3 = (6,-3,3,9)$,
$c_4 = (4,-1,5,6)$.

6. $d_1 = (1,0,0,2,5)$,
$d_2 = (0,1,0,3,4)$,
$d_3 = (0,0,1,4,7)$,
$d_4 = (2,-3,4,11,12)$.

7. Bizonyítsa be, hogy két arányos vektort tartalmazó vektorrendszer lineárisan összefüggő!

8. Bizonyítsa be, hogy nullás vektort tartalmazó vektorrendszer lineárisan összefüggő!

9. Bizonyítsa be, hogy ha az a_1, a_2, a_3 vektorrendszer lineárisan összefüggő és az a_3 vektor az a_1, a_2 vektorok lineáris kombinációja, akkor vagy az a_1 vektor lesz arányos az a_2 vektorral, vagy fordítva, az a_2 lesz arányos az a_1 vektorral!

10. Legyen $a_1, a_2, \dots a_s$ – k-adrangú n-dimenziós vektorrendszer. Bizonyítsa be, hogy bármelyik lineárisan független részrendszere, amely k vektorból áll, bázisa lesz ennek a rendszernek!

11. Bizonyítsa be, hogy az adott vektorrendszer bármelyik lineárisan független részrendszere kibővíthető ezen rendszer bázisává!

12. Milyen esetben lesz a vektorrendszernek egyetlen bázisa?

13. Ekvivalens lesz-e két vektorrendszer, ha egyforma ranggal rendelkeznek?

14. Legyen $a_1 = (0,1,0,2,0)$, $a_2 = (7,4,1,8,3)$, $a_3 = (0,3,0,4,0)$, $a_4 = (1,9,5,7,1)$, $a_5 = (0,1,0,5,0)$. Kiválasztható-e a γ_{ij} $(i,j = 1,2,3,4,5)$ szám úgy, hogy a

$$b_1 = \sum_{k=1}^{5} \gamma_{1k} a_k\,, \qquad b_2 = \sum_{k=1}^{5} \gamma_{2k} a_k\,, \qquad \dots\,, \qquad b_5 = \sum_{k=1}^{5} \gamma_{5k} a_k$$

vektorrendszer lineárisan összefüggő legyen?

Keresse meg a λ paraméter minden olyan értékét, amelynél a b vektor az a_1, a_2, a_3 vektorok lineáris kombinációja lesz, ha:

15. $a_1 = (2,3,5)$,
$a_2 = (3,7,8)$,
$a_3 = (1,-6,1)$,
$b = (7,-2,\lambda)$.

16. $a_1 = (4,4,3)$,
$a_2 = (7,2,1)$,
$a_3 = (4,1,6)$,
$b = (5,9,\lambda)$.

17. $a_1 = (3,2,5)$,
$a_2 = (2,4,7)$,
$a_3 = (5,6,\lambda)$,
$b = (1,3,5)$.

18. $a_1 = (3,2,6)$,
$a_2 = (7,3,9)$,
$a_3 = (5,1,3)$,
$b = (\lambda,2,5)$.

Keresse meg az alábbi vektorrendszerek összes bázisát:

19. $a_1 = (1,2,3,4)$,
$a_2 = (2,3,4,5)$,
$a_3 = (3,4,5,6)$,
$a_4 = (4,5,6,7)$.

20. $a_1 = (1,2,3)$,
$a_2 = (2,3,4)$,
$a_3 = (3,2,3)$,
$a_4 = (4,3,4)$,
$a_5 = (1,1,1)$.

21. Hány bázisa lesz a $k+1$ vektorból álló k-adrangú rendszernek, amely a nullás vektortól eltérő arányos vektorokat tartalmaz?

10. A mátrix rangja

Példafeladatok

1. Határozzuk meg az alábbi mátrix rangját

$$A=\begin{pmatrix}2 & -4 & 3 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1\\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5\end{pmatrix}!$$

Megoldás. A mátrix bal felső sarkában lévő másodrendű aldeterminánsa nullával egyenlő. Azonban az A mátrix tartalmaz nullától eltérő másodrendű aldeterminánsokat, például

$$\delta_2=\begin{vmatrix}-4 & 3\\ -2 & 1\end{vmatrix}=2.$$

A harmadrendű

$$\delta_3=\begin{vmatrix}2 & -4 & 3\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}$$

aldeterminánsa, amely a δ_2 beszegési aldeterminánsa, szintén nem egyenlő nullával (győződjenek meg arról, hogy $\delta_3=1$). Azonban mind a két negyedrendű aldeterminánsa, amelyek a δ_3 beszegési aldeterminánsai, egyenlő nullával:

$$\delta_4'=\begin{vmatrix}2 & -4 & 3 & 1\\ 1 & -2 & 1 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 3\\ 4 & -7 & 4 & -4\end{vmatrix}=0,\qquad \delta_4''=\begin{vmatrix}2 & -4 & 3 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 4 & -7 & 4 & 5\end{vmatrix}=0.$$

Tehát az A mátrix rangja egyenlő hárommal.

2. Az elemi átalakítások felhasználásával határozzuk meg az alábii mátrix rangját

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2\\ -2 & 5 & 8 & 4 & -3 & 1\\ 6 & 0 & -1 & -2 & 7 & 5\\ -1 & 1 & 1 & 1 & -2 & -1\end{pmatrix}!$$

Megoldás. Az A mátirx sorai felett fokozatosan elvégezzük a következő elemi átalakításokat: a harmadik, negyedik, ötödik sorokhoz hozzáadjuk az elsőt, megfelelően beszorozva -4, 2 és -1-re. Eredményül az alábbi mátrixot kapjuk:

$$A_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2\\ -6 & -3 & -4 & 0 & -7 & -7\\ 8 & 4 & 5 & 0 & 9 & 9\\ -2 & -1 & -2 & 0 & -3 & -3\end{pmatrix}.$$

Továbbá, hozzáadjuk az első, második, harmadik, ötödik, hatodik oszlopokhoz a negyediket, megfelelően beszorozva -1, -2, -3, -1 és -2-re. Ezután felcseréljük az első és negyedik oszlopokat. A következő lépésben megszorozzuk a harmadik és ötödik sorokat -1-re, és áttértünk az alábbi alakú mátrixhoz:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 6 & 7 & 7 \\ 0 & 4 & 5 & 8 & 9 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Az A_2 mátrix sorai és oszlopai felett hasonló elemi átalakításokat végzünk el, ezek után pedig azt kapjuk, hogy

$$A_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tehát az A mátrix rangja hárommal egyenlő.

3. Bizonyítsuk be, hogy két mátrix összegének rangja nem több rangjaik összegénél!

Megoldás. Legyen A és B – tetszőleges $s \times t$-mátrixok az $\mathbb{R}$ felett. Megjelöljük $a_1, a_2, \dots, a_t$-vel és $b_1, b_2, \dots, b_t$-vel megfelelően az A és B mátrixok vektor-oszlopait. Akkor a következő vektorrendszer

$$a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_t + b_t, \qquad (1)$$

nyilvánvalóan az $A + B$ mátrixösszeg vektor-oszlopainak rendszere lesz.

Feltételezzük, hogy $c_1, c_2, \dots, c_k$ – az A mátrix vektor-oszloprendszerének bázisa, $d_1, d_2, \dots, d_l$ – pedig a B mátrix vektor-oszloprendszerének bázisa ($k = \operatorname{rank} A, l = \operatorname{rank} B$). Akkor

$$a_i = \sum_{j=1}^{k} \gamma_{ij} c_j, \qquad b_i = \sum_{m=1}^{l} \delta_{im} d_m$$

valamely γ_{ij}, δ_{im} valós számokra, ahol $i = 1, \dots, t$; $j = 1, \dots, k$; $m = 1, \dots, l$. Innen

$$a_i + b_i = \sum_{j=1}^{k} \gamma_{ij} c_j + \sum_{m=1}^{l} \delta_{im} d_m \qquad (i = 1, \dots, t).$$

Tehát az (1) vektorrendszer a

$$c_1, c_2, \dots, c_k, d_1, d_2, \dots, d_l$$

vektorrendszer által lineárisan kifejezhető. Innen kifolyólag, az $(1)-$es vektorrendszer rangja nem több mint $k + l$. Vagyis $\operatorname{rank} A + B \leq \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$.

Gyakorlatok

1. Számítsa ki az alábbi mátrixok rangját a beszegési aldeterminánsok módszerével:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 11 \\ 3 & 3 & 0 & 9 \\ 2 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{pmatrix}$!

2. Keresse meg a λ paraméter értékét, melyre az alábbi mátrixnak a legkisebb a rangja:

$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$!

3. Mivel lesz egyenlő az alábbi mátrixok rangja a λ paraméter különböző értékeinél:

a) $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-\lambda^2 \end{pmatrix}$?

4. Számítsa ki az alábbi mátrixok rangját az elemi átalakítások segítségével:

a) $\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 75 & 0 & 116 & 39 & 0 \\ 171 & -69 & 402 & 123 & 45 \\ 301 & 0 & 87 & -417 & -169 \\ 114 & -46 & 268 & 82 & 30 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{pmatrix}$!

5. Bizonyítsa be, hogy ha a mátrixhoz hozzácsatolnak egy sort (vagy egy oszlopot), vagy nem változik a rangja, vagy megnövekedik eggyel!

6. Bizonyítsa be, hogy egy r-edrangú tetszőleges mátrix felírható elsőrangú r számú mátrixok összegeként, de nem írható fel kevesebb, mint r ilyen mátrix összegeként!

7. Legyen $A = \|a_{ij}\| - n > 1$-edrendű mátrix és r – ezen mátrix rangja. Határozza meg az adjungált $A^* = \|A_{ij}\|$ mátrix rangját, ahol A_{ij} – az A mátrix a_{ji} elemének algebrai komplementere!

11. Lineáris egyenletrendszer. A Kronecker-Capelli tétel

Példafeladatok

1. Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0! \end{cases}$$

Megoldás. Kiírjuk a feltételben megadott egyenletrendszer

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{5 & -1} & 2 & 1 \\ \boxed{2 & 1} & 4 & -2 \\ 1 & -3 & -6 & 5 \end{pmatrix},$$

mátrixát és megkeressük a rangját. A másodrendű M aldeterminánsa, amely az A mátrix bal felső sarkában található (bekeretezett), nullától eltérő. A továbbiakban kiszámítjuk az M aldeterminánsa összes beszegési aldeterminánsait:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -6 \end{vmatrix} = 0, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Így a $\operatorname{rank} A = 2$. Most pedig megkeressük a lineáris egyenletrendszer bővített $\bar{A}$ mátrixának rangját. Ehhez elegendő kiszámítani az $\bar{A}$ mátrix úgynevezett *karakterisztikus aldeterminánsait*, vagyis az M aldeterminánsa harmadrendű beszegési aldeterminánsait, amelyeket az A mátrix nem tartalmaz. Esetünkben csak egy ilyen aldeterminánsa létezik –

$$M_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -35 \neq 0.$$

Tehát, a $\operatorname{rank} \bar{A} = 3$. Vagyis a Kronecker-Capelli tétel szerint az adott lineáris egyenletrendszer ellentmondó.

2. Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 0! \end{cases}$$

Megoldás. Megmutatható, hogy a lineáris egyenletrendszer megoldható, amennyiben a mátrixának és bővített mátrixának rangja egyenlő nullával. Mátrixának bal felső sarkában található másodrendű

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

aldeterminánsnullától eltérő. Ezért azt a rendszert fogjuk megoldani, amely a feltételben adott rendszer első két x_1 és x_2 ismeretlenektől vett egyenletéből tevődik össze. A többi x_3, x_4, x_5 ismeretleneket szabad ismeretlenként kezeljük és átvisszük ezen egyenletek jobb oldalára:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 + 2x_3 + x_4 - x_5, \\ 3x_1 - x_2 = 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5. \end{cases}$$

A Cramer-szabály szerint megkeressük ennek a rendszernek a megoldását

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 + 2x_3 + x_4 - x_5 & 1 \\ 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5 & -1 \end{vmatrix} = -5 - x_3 + 3x_4 + 4x_5,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 + 2x_3 + x_4 - x_5 \\ 3 & 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5 \end{vmatrix} = 1 - 7x_3 - 7x_4;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{M} = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 - x_5,$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{M} = -\frac{1}{4} + \frac{7}{4}x_3 + \frac{7}{4}x_4.$$

Így a feltételben megadott lineáris egyenletrendszer általános megoldása:

$$(\tfrac{5}{4} + \tfrac{1}{4}\alpha - \tfrac{3}{4}\beta - \delta, -\tfrac{1}{4} + \tfrac{7}{4}\alpha + \tfrac{7}{4}\beta, \alpha, \beta, \delta),$$

ahol α, β, δ tetszőleges valós számok.

Gyakorlatok

1. Vizsgálja meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket megoldhatóságukra és keresse meg általános és egy konkrét megoldásukat:

a) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3, \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4; \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3; \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12; \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3, \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7; \end{cases}$

g) $\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 21, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 15, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18; \end{cases}$

h) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 5x_1 + 11x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 7x_2 - x_3 + 2x_4 = 7; \end{cases}$

i) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1; \end{cases}$ j) $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 5, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 4, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 1! \end{cases}$

2. Vizsgálja meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket megoldhatóságukra és a λ paraméter értékétől függően keresse meg az általános megoldásukat:

a) $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1, \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9, \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = \lambda; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 5, \\ -x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 20x_4 = 11, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + \lambda x_4 = 2; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7, \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9, \\ \lambda x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 6x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7, \\ 8x_1 + 12x_2 + 7x_3 + \lambda x_4 = 9; \end{cases}$

e) $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1; \end{cases}$ f) $\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda^2! \end{cases}$

3. Vizsgálja meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket megoldhatóságukra és az a, b, c, d paraméterek értékétől függően keresse meg az általános megoldásaikat:

a) $\begin{cases} x + y + z = 1, \\ ax + by + cz = d, \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} ax + y + z = 1, \\ x + by + z = 1, \\ x + y + cz = 1! \end{cases}$

12. Homogén lineáris egyenletrendszerek

Példafeladatok

1. Keressük meg az egyenletrendszer megoldásainak fundamentális rendszerét és általános megoldását

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0! \end{cases} \tag{1}$$

Megoldás. Először kiszámoljuk az (1) rendszer

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

mátrixának rangját. Az A mátrix bal felső sarkában található

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

aldeterminánsa nullától különböző. Kiszámítjuk az A mátrix M aldeterminánsnak megfelelő összes harmadrendű beszegési aldeterminánsait. Emellett figyelembe vesszük azt is, hogy az A mátrix harmadik és negyedik oszlopa megfelelően arányosak az első és második oszlopokkal. Ezért azok az aldeterminánsok, amelyek a harmadik és negyedik oszlopok által képződnek, nullával egyenlőek. Az alábbi két aldeterminánsa kiszámítása marad fent:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad . M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ezek szerint $\operatorname{rank} A = 2$. Számításba véve, hogy a rangot meghatározó M aldeterminánsa (bázis aldeterminánsa) az A mátrix bal felső sarkában található, az (1) rendszerben az első két egyenletet hagyjuk meg, a bal oldalukon pedig − csak az első két ismeretlen fog szerepelni (*kötött* ismeretlenek). A másik három x_3, x_4, x_5 ismeretlent *szabad*oknak nyilvánítjuk és az egyenlet jobb oldalára visszük át

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 + x_4 + 2x_5, \\ x_2 = x_4 + x_5. \end{cases} \tag{2}$$

Táblázatot szerkesztünk az $x_1, \dots, x_5$ ismeretlenek számára, melyben elkülönítjük a szabad és a kötött ismeretleneket, és a szabad ismeretleneknek a táblázatban feltűntetett értékeket adjuk:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
		1	0	0
		0	1	0
		0	0	1

1. táblázat

A szabad ismeretlenek értékeinek e három készletének mindegyikére vonatkozóan megoldjuk a (2) rendszert és megtaláljuk az x_1, x_2 kötött ismeretlenek megfelelő értékeit:

1) az első $x_3 = 0,\ x_4 = x_5 = 0$ készletre a (2) egyenletrendszerből azt kapjuk, hogy $x_2 = 0, x_1 = 1 - x_2 = 1;$

2) a második $x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0$ készletre a (2) egyenletrendszerből azt kapjuk, hogy $x_2 = 1, x_1 = 1 - x_2 = 0;$

3) a harmadik $x_3 = x_4 = 0,\ x_5 = 1$ készletre a (2) egyenletrendszerből azt kapjuk, hogy $x_2 = 1, x_1 = 2 - x_2 = 1.$

Így kitölthetjük a szabad helyeket az 1. táblázatban és egy új táblázatot kapunk:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	0	1	0	0
0	1	0	1	0
1	1	0	0	1

2. táblázat

A 2. táblázat a (2) egyenletrendszer három $a_1 = (1,0,1,0,0),\ a_2 = (0,1,0,1,0),\ a_3 = (1,1,0,0,1)$ megoldását adja meg és egyben az (1) homogén lineáris egyenletrendszer megoldásait is.

Ezek a megoldások az (1) egyenletrendszer fundamentális rendszerét alkotják. Ez abból következik, hogy az (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) vektorok lineárisan független vektorrendszert alkotnak.

Az (1) egyenletrendszer általános megoldása a fundamentális rendszerének tetszőleges lineáris kombinációja

$$\delta_1 a_1 + \delta_2 a_2 + \delta_3 a_3 = (\delta_1 + \delta_3, \delta_2 + \delta_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3),$$

ahol $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ − tetszőleges valós számok.

2. Az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

mátrix sorai az alábbi egyenletrendszer fundamentális rendszerét alkotják-e:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0? \end{cases} \tag{3}$$

Megoldás. Könnyű meggyőződni arról, hogy az A mátrix minden sora a (3) egyenletrendszer megoldása lesz. Továbbá $\operatorname{rank} A = 3$, amennyiben a harmadrendű

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

aldeterminánsa, amely az A mátrix utolsó három oszlopában található, nem egyenlő nullával. Ezek szerint a mátrix sorai lineárisan független vektorrendszert alkotnak.

Végül, megkeressük a (3) egyenletrendszer

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

mátrixának rangját. Az

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

aldeterminánsa, amely a B mátrix bal felső sarkában található, nem egyenlő nullával. Kiszámítjuk az M_1 aldeterminánsa összes beszegési aldeterminánsát:

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \qquad M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

$$M_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0, \qquad M_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Tehát, $\operatorname{rank} B = 2$. Innen következik, hogy a (3) rendszer fundamentális rendszere három elemből (megoldásból) áll. Ezért az A matrix sorainak lineáris függetlenségéből következik, hogy a (3) egyenletrendszer bármelyik megoldása lineárisan kifejezhető az A mátrix sorain keresztül. Vagyis a mátrix sorai a (3) egyenletrendszer fundamentális rendszerét alkotják.

Gyakorlatok

1. Keresse meg az egyenletrendszerek fundamentális rendszerét és általános megoldásait:

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_5 = 0; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0; \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0, \\ -x_1 + x_3 - x_5 = 0, \\ -x_2 + x_4 - x_6 = 0, \\ -x_3 + x_5 = 0, \\ -x_4 + x_6 = 0; \end{cases}$ f) $\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0! \end{cases}$

2. Az

$$A = \begin{pmatrix} 30 & -24 & 43 & -50 & -5 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 9 & -20 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 9 & -20 & -3 \\ 1 & -11 & 2 & 13 & 4 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

mátrixok sorai fundamentális rendszerét alkotják-e az alábbi egyenletrendszernek

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + 11x_5 = 0, \\ x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 5x_4 - 4x_5 = 0? \end{cases}$$

3. Az alábbi mátrix mely sorai alkotják

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & -2 & -7 \\ 5 & 3 & 7 & -6 & -14 \\ 8 & 0 & -5 & 6 & 13 \\ 4 & -2 & -7 & -5 & -7 \end{pmatrix}$$

a

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 5x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszer fundamentális rendszerét?

4. Keresse meg azokat a homogén lineáris egyenletrendszereket, melyek számára az alábbi vektorrendszerek a fundamentális rendszerei lehetnének:

a) (3,4,2,1,6), (5,9,7,4,7); b) $(4,3,-1,-1,11), (1,6,8,5,-4)$!

5. Bizonyítsa be, hogy ha a homogén lineáris egyenletrendszer rangjának értéke eggyel kevesebb az ismeretlenek számánál, akkor a rendszer tetszőleges két megoldása arányos lesz egymással!

6. Legyen A − n ismeretlentől vett $n-1$ homogén lineáris egyenletből álló rendszer mátrixa, M_i − az A mátrix aldeterminánsa, amely az A mátrix i-edik sora kihúzásával kapható

meg. Bizonyítsa be, hogy a lineáris egyenletrendszer megoldásai közül az egyik az alábbi számrendszer

$$M_1,\ -M_2,\ M_3,\ -M_4, \dots, (-1)^{n-1}M_n,$$

emellett, ha ez a megoldás nem nulla, akkor bármelyik másik megoldás arányos lesz vele!

7. Felhasználva az előző feladat eredményeit, keresse meg az alábbi egyenletrendszerek általános megoldását:

a) $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 6x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 0! \end{cases}$

8. Bizonyítsa be, hogy a homogén lineáris egyenletrendszer tetszőleges megoldásának k-adik komponense akkor és csak akkor lesz egyenlő nullával, ha a rendszer mátrixának rangja a k-adik oszlop kihúzása esetén eggyel csökken!

9. Milyen feltételek mellett lesz az inhomogén lineáris egyenletrendszer tetszőleges megoldásainak adott lineáris kombinációja ismét megoldása ennek a rendszernek?

13. Csoportok. Gyűrűk. Testek

Példafeladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy az egész számok $\mathbb{Z}$ halmaza az egész számok összeadására nézve csoportot alkot, a szorzásra nézve viszont nem lesz csoport. Az adott $\mathbb{Z}$ halmazon hozzunk fel olyan példát binér műveletre, amelyre nem teljesül az asszociativitás tulajdonsága!

Megoldás. Nyilvánvaló, hogy az egész számok összeadása binér művelet lesz a $\mathbb{Z}$ halmazon, amennyiben a meghatározás szerint az egész számok összege szintén egész szám. Továbbá ismeretes, hogy ez a művelet eleget tesz az asszociativitás tulajdonságának, vagyis $(a+b)+c=a+(b+c)$ tetszőleges $a,b,c\in\mathbb{Z}$ elemekre. Az egész számok között található egy olyan 0 szám, amelyre $a+0=0+a=a$ tetszőleges $a\in\mathbb{Z}$ elemre. Végül tetszőleges a egész számra létezik ellentétes $-a$ egész szám a következő tulajdonsággal: $a+(-a)=(-a)+a=0$. Megjegyezhetjük, hogy az egész számok összeadására teljesül a kommutativitás tulajdonsága is, így a $\mathbb{Z}$ halmaz Abel-csoportot alkot az összeadásra nézve.

Másik esetben, amikor a $\mathbb{Z}$ halmazon a szorzás művelete van megadva, láthatjuk, hogy:

1) ez a művelet binér művelet, amennyiben $ab\in\mathbb{Z}$ tetszőleges $a,b\in\mathbb{Z}$ elemekre;

2) $(ab)c=a(bc)$ tetszőleges a,b,c egész számokra;

3) az egész számok között található egy olyan 1 szám, hogy $1\cdot a=a\cdot 1=a$ tetszőleges a egész számra.

Azonban nem mindegyik $a\in\mathbb{Z}$ elemre létezik inverz $a^{-1}\in\mathbb{Z}$ elem. Például a 2 egész számra nem létezik olyan x egész szám, amelyre $2x=1$. Így a $\mathbb{Z}$ halmaz nem alkot csoportot az egész számok szorzására nézve.

Végül, megvizsgáljuk a következő binér műveletet a $\mathbb{Z}$ halmazon:

$$m\circ n=-m+(-n)\qquad (m,n\in\mathbb{Z}),$$

Ahol a $+$ az egész számok összeadása, $-a$ pedig az a egész szám ellentétes eleme (nyilvánvaló, hogy $m\circ n\in\mathbb{Z}$ tetszőleges $m,n\in\mathbb{Z}$ elemekre). Akkor

$$(1\circ 2)\circ 3=\big(-1+(-2)\big)\circ 3=-\big(-1+(-2)\big)+(-3)=0\neq 4=1\circ(2\circ 3).$$

Az utolsó egyenlőségből következik, hogy a „$\circ$” binér műveletre nem teljesül az asszociatívitás tulajdonsága.

2. Mutassuk meg, hogy a valós elemekből álló összes nem elfajult n-es mátrixok $GL(n,\mathbb{R})$ halmaza a szorzásra nézve csoportot alkot!

Megoldás. Nyilvánvaló, hogy két tetszőleges $GL(n,\mathbb{R})$-ből vett nem elfajult mátrix szorzata a $GL(n,\mathbb{R})$ nem elfajult mátrixa lesz. Ez abból a tulajdonságból kövekezik, mely

szerint két n-es mátrix szorzatának determinánsa ezen mátrixok determinánsainak szorzatával egyenlő. Így a mátrixok szorzása binér művelet lesz a $GL(n,\mathbb{R})$ halmazon. Mint ismeretes, ez a művelet eleget tesz az asszociativitás tulajdonságának, valamint a $GL(n,\mathbb{R})$ halmazban létezik olyan egységelem a szorzás műveletét tekintve, melynek szerepét az n-ed rendű egységmátrix tölti be. Végül az inverz mátrix létezéséről szóló tételből az következik, hogy egy tetszőleges nem elfajult $A \in GL(n,\mathbb{R})$ mátrixra létezik inverz $A^{-1} \in GL(n,\mathbb{R})$ mátrix, mivel nem elfajult mátrixtól van szó. Így a $GL(n,\mathbb{R})$ halmaz a mátrixok szorzására nézve csoportot alkot. Ezt a csoportot *teljes lineáris n-edrendű csoportnak* nevezzük az $\mathbb{R}$ vlós számok halmaza fölött. Megjegyezzük, hogy a $GL(1,\mathbb{R})$ – Abel-csoport lesz, viszont a $GL(n,\mathbb{R})$ $(n > 1)$ nem alkot Abel-csoportot.

A $GL(n,\mathbb{R})$ csoporton belül megvizsgáljuk az összes $SL(n,\mathbb{R})$ mátrixok részhalmazát, melyeknek determinánsa eggyel egyenlő: $SL(n,\mathbb{R}) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) || A| = 1\}$. Tetszőleges $A, B \in SL(n,\mathbb{R})$ mátrixokra

$$A, B \in SL(n,\mathbb{R}) \text{ és } A^{-1} \in SL(n,\mathbb{R}),$$

amennyiben $|AB| = |A| \cdot |B| = 1$, $|A^{-1}| = |A|^{-1} = 1$. Tehát az részcsoport kritériuma alapján az $SL(n,\mathbb{R})$ halmaz a $GL(n,\mathbb{R})$ csoport részcsoportja lesz. Az $SL(n,\mathbb{R})$ csoportot *speciális lineáris n-edrendű csoportnak* nevezzük az $\mathbb{R}$ halmaz fölött.

A $GL(n,\mathbb{R})$ csoportban megvizsgáljuk az összes $GL(n,\mathbb{Q})$ mátrix részhalmazát, melyeknek elemei racionális számok. (vagyis az összes nem elfajult n-es mátrix halmaza a $\mathbb{Q}$ fölött). A két mátrix szorzatáról szóló meghatározás és az inverz mátrix megtalálásának szabálya alapján az következik, hogy a $GL(n,\mathbb{Q})$ két tetszőleges mátrixának szorzata a $GL(n,\mathbb{Q})$ mátrixa lesz és a $GL(n,\mathbb{Q})$ tetszőleges mátrixának inverze szintén a $GL(n,\mathbb{Q})$ mátrixa lesz. Hasonlóan az előző esethez itt is azt kapjuk, hogy a $GL(n,\mathbb{Q})$ – a $GL(n,\mathbb{R})$ csoport részcsoportja lesz.

3. Bizonyítsuk be, hogy az M halmaz saját magára történő összes bijektív leképezésének S_M halmaza a leképezések szorzását tekintve csoportot alkot!

Megoldás. Legyen f, g – az M halmaz saját magára történő tetszőleges bijektív leképezései. Először megmutatjuk, hogy fg – szintén az M halmaz saját magára történő bijektív leképezése, vagyis hogy az S_M leképezéseinek szorzása binér művelet lesz az S_M halmazon.

Legyen m_1, m_2 – az M halmaz tetszőleges különböző elemei. Akkor $g(m_1) \neq g(m_2)$ (amennyiben g – bijektív). Innen $f(g(m_1)) \neq f(g(m_2))$ (amennyiben f – bijektív). Ezért

$fg(m_1) \neq fg(m_2)$. Ez elsősorban azt jelenti, hogy az fg szorzat az M halmaz saját magára történő injektív leképezése. Továbbá legyen m – az M halmaz tetszőleges eleme. Akkor az M halmazban létezik egy olyan n elem, hogy $f(n) = m$ (mivel az f bijektív leképezés). Hasonlóan az M halmazban létezni fog egy olyan r elem, hogy $g(r) = n$. Tehát, $fg(r) = f\big(g(r)\big) = f(n) = m$. Így sikerült bebizonyosodnunk arról, hogy egy tetszőleges $m \in M$ elemre létezik olyan $r \in M$ elem, hogy $fg(r) = m$. Vagyis az fg szorzat szürjektív leképezés lesz, ezért az M halmaz saját magára történő bijektív leképezése is.

Mint ismeretes, az S_m leképezéseinek szorzására teljesül az asszociatívitás tulajdonsága. Az egységelem szerepét az S_M-ben az M halmaz saját magára történő azonos e_M leképezése tölti be ($e_M(m) = m$ $(m \in M)$; e_M – nyilvánvalóan egy bijektív leképezés). Azt kell még bebizonyítanunk, hogy tetszőleges $f \in S_M$ leképezésre létezik inverz $f^{-1} \in S_M$ leképezés.

Legyen f – az M halmaz saját magára történő tetszőleges leképezése. Akkor egy tetszőleges $m \in M$ elemre létezik egyetlen $n \in M$ őskép, vagyis olyan, hogy $f(n) = m$. Megjelöljük az m elem n ősképét $f^{-1}(m)$-el. Megvizsgáljuk a $g : M \to M$ leképezést, amely a következő szabály szerint van meghatározva: $g : m \to f^{-1}(m)$ $(m \in M)$. A g leképezés bijektív lesz. Valóban, hisz a g leképezés szerint tetszőleges $m \in M$ elem az $f(m)$ elem képe lesz, amennyiben $g\big(f(m)\big) = f^{-1}\big(f(m)\big) = m$. Továbbá különböző tetszőleges $m_1, m_2 \in M$ elemekre $g(m_1) \neq g(m_2)$. Amennyiben ellenkező esetben $m_1 = f\big(g(m_1)\big) = f(g(m_2))$, de ez lehetetlen. Végül megmutatjuk, hogy a g leképezés az f leképezés inverze lesz. Tetszőleges $m \in M$ elemre

$$fg(m) = f\big(g(m)\big) = f\big(f^{-1}(m)\big) = m,$$
$$gf(m) = g\big(f(m)\big) = f^{-1}\big(f(m)\big) = m.$$

Vagyis $fg = gf = e_M$.

Ebből kifolyólag, az S_M csoportot alkot a leképezések szorzására nézve.

Megjegyzés. Ha $M = \{1,2,\dots,n\}$, akkor az S_M csoport elemei n-ed rendű permutációk lesznek. Tehát az összes n-ed rendű permutációk S_n halmaza a permutációk szorzását tekintve csoportot alkot, amelyet *n-edfokú szimmetrikus csoportnak* nevezünk.

4. Bizonyítsuk be, hogy az

$$UT(2,\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| m \in \mathbb{Z} \right\}$$

csoport a mátrixok szorzását tekintve izomorf az egész számok $\mathbb{Z}^+$ csoportjával az összeadásra nézve!

Megoldás. Megvizsgáljuk az $f : UT(2,\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}^+$ leképezést, amely a következő szabály szerint van meghatározva:

$$f : \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to m \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

Nyilvánvaló, hogy f – bijektív leképezés. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

– az $UT(2,\mathbb{Z})$ tetszőleges mátrixai. Akkor

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & m+n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ezért $f(AB) = m + n = f(A) + f(B)$. Így a csoportok izomorfizmusának definíciója szerint $UT(2,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^+$.

5. Az egész számok $\mathbb{Z}$ halmaza az összeadás és szorzás műveleteit tekintve gyűrű, test lesz-e?

Megoldás. Az 1. példa megoldásából az következik, hogy az egész számok összeadása és szorzása binér művelet a $\mathbb{Z}$ halmazon, emellett az összeadásra nézve a $\mathbb{Z}$ halmaz Abel-csoportot alkot, az egész számok szorzására pedig teljesülnek az asszociatívitás és kommutatívitás tulajdonságai. Ezen kívül a $\mathbb{Z}$ halmazban a szorzás műveletét nézve létezik egységelem. Ismeretes, hogy az egész számok összeadása és szorzása összefügg a disztributivitás törvényével, vagyis tetszőleges $a, b, c \in \mathbb{Z}$ elemekre $a(b + c) = ab + ac$. A fentebb említettek azt jelentik, hogy az egész számok $\mathbb{Z}$ halmaza az összeadásra és a szorzásra nézve kommutatív egységelemes gyűrű. Azonban a $\mathbb{Z}$ gyűrű nem lesz test, mivel például a nullától különböző 2 a $\mathbb{Z}$ nem invertálható eleme.

6. Az összes páratlan egész számok halmaza gyűrűt alkot-e az egész számok összeadásának és szorzásának műveletére nézve?

Megoldás. Nyilvánvaló, hogy tetszőleges páratlan egész számok összege páros szám lesz. Ezért a páratlan egész számok összeadása nem lesz binér művelet a páratlan egész számok halmazán. Így ez a halmaz nem alkot gyűrűt a megadott műveletre nézve.

7. Bizonyítsuk be, hogy a valós számok halmazának $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} | a, b \in \mathbb{Q}\}$ részhalmaza testet alkot a valós számok összeadásának és szorzásának műveletére nézve!

Megoldás. A $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ halmazbeli valós számok összeadása és szorzása binér műveletek lesznek ezen a halmazon, amennyiben tetszőleges $a_1 + b_1\sqrt{3},\ a_2 + b_2\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ elemekre

$$(a_1 + b_1\sqrt{3}) + (a_2 + b_2\sqrt{3}) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}),$$

$$(a_1 + b_1\sqrt{3})(a_2 + b_2\sqrt{3}) = (a_1a_2 + 3b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}).$$

Ismeretes, hogy a valós számok összeadása és szorzása, többek között a $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ halmazbeli számok is, kielégítik az asszociatívitás és a kommutatívitás tulajdonságait. Emellett kapcsolatban állnak a disztributív törvénnyel is.

A $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ halmaz tartalmazza a 0 és 1 számokat ($0 = 0 + 0\sqrt{3},\ 1 = 1 + 0\sqrt{3}$). Ezek a számok megfelelően a null és egységelem szerepét játszák az összeadás és szorzás műveletét tekintve.

Amennyiben tetszőleges $a, b \in \mathbb{Q}$ számokra léteznek ellentétes $-a, -b \in \mathbb{Q}$ számok, akkor tetszőleges $a + b\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ számra létezik ellentétes $-(a + b\sqrt{3}) = (-a) + (-b)\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ szám (nyilvánvaló, hogy $(a + b\sqrt{3}) + ((-a) + (-b)\sqrt{3}) = 0$). Végül megmutatjuk, hogy tetszőleges nem null $a + b\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ számnak létezik invereze a $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$-ban. Amennyiben a és b egyidejűleg nem egyenlők nullával, akkor $a^2 - 3b^2 \neq 0$. Mert ellenkező esetben $a = \pm b\sqrt{3}$, ami nem lehetséges egyetlen a, b racionális számra sem. Megvizsgáljuk az $\frac{a}{a^2-3b^2} + \frac{-b}{a^2-3b^2}\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ számot. Kiszámítjuk a következő szorzatot

$$(a + b\sqrt{3})\left(\frac{a}{a^2 - 3b^2} + \frac{-b}{a^2 - 3b^2}\sqrt{3}\right) = \frac{a^2 - 3b^2}{a^2 - 3b^2} + \frac{ba - ab}{a^2 - 3b^2}\sqrt{3} = 1.$$

Így meggyőződtünk arról, hogy ez a szám az $a + b\sqrt{3}$ szám inverze lesz.

Ebből kifolyólag az következik, hogy a $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ halmaz testet alkot a $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ halmazbeli valós számok összeadására és szorzására nézve.

8. Legyen K – gyűrű. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $a \in K$ elemre $a \cdot 0 = 0$ (0 a K gyűrű null eleme)!

Megoldás. Legyen a – a K gyűrű tetszőleges eleme. Akkor

$$a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0,$$

amennyiben 0 – a K gyűrű null eleme. Más szempontból a disztributivitás tulajdonságából az összeadás és szorzás műveleteit tekintve azt kapjuk, hogy

$$a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot 0.$$

Ehhez az egyenlőséghez hozzáadva az $a \cdot 0$ elem ellentétes elemét (amely létezik, mivel K – gyűrű) azt kapjuk, hogy

$$-(a \cdot 0) + (a \cdot 0 + a \cdot 0) = -(a \cdot 0) + a \cdot 0.$$

Innen, felhasználva az asszociativitás tulajdonságát az összeadást tekintve és az ellentétes elem definícióját megkapjuk, hogy $a \cdot 0 = 0$.

9. Legyen K – gyűrű. A K gyűrű nem nulla a és b elemeit *nullosztóknak* nevezzük, ha $ab = 0$. Bizonyítsuk be, hogy egy test sem tartalmaz nullosztókat!

Megoldás. Ezt az indirekt módszer segítségével fogjuk bizonyítani. Legyen F − test, amely tartalmazza az a és b nullosztókat. Akkor a meghatározás alapján $ab = 0$, ahol $a \neq 0$ és $b \neq 0$. Amennyiben $a \neq 0$, akkor az F testben az a elemnek létezik a^{-1} inverz eleme. Megszorozzuk az $ab = 0$ egyenlőséget baloldalról a^{-1}-el és megkapjuk, hogy $a^{-1}(ab) = a^{-1} \cdot 0$. Innen $1 \cdot b = 0$, vagyis $b = 0$. Ezzel ellentmondást kaptunk, tehát semelyik test sem tartalmaz nullosztókat.

Megjegyzés. Léteznek olyan gyűrűk, melyek tartalmazhatnak nullosztókat. Például az $\mathbb{R}_2$ gyűrűben minden valós elemű 2×2-es mátrix esetében az összeadás és szorzás műveletét tekinteve az

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

mátrixok nullosztók lesznek (győződjünk meg erről önállóan).

Gyakorlatok

1. Az alábbi halmazok közül melyek alkotnak csoportot a megadott műveletre nézve:

a) a racionális számok halmaza az összeadás műveletét tekintve;

b) a racionális számok halmaza az szorzás műveletét tekintve;

c) az összes pozitív racionális szám halmaza az szorzás műveletét tekintve;

d) egy adott $a \neq 0$ valós szám egész kitevőjű hatványainak halmaza a szorzás műveletét tekintve;

e) az egész számok halmaza, hogyha a művelet a következőképpen van meghatározva: $a * b = a^b$;

f) az egész számok halmaza, hogyha a művelet a következőképpen van meghatározva: $a * b = a^2 b^2$;

g) a komplex számok halmaza adott φ argumentummal a szorzás műveletét tekintve;

h) az összes komplex n-edik egységgyökök halmaza a szorzás műveletét tekintve;

i) a nullától eltérő összes komplex szám halmaza, melyeknek abszolút értéke nem nagyobb egy rögzített r számtól, a szorzás műveletét tekintve;

j) az összes n-ed rendű páros permutációk halmaza a szorzás műveletét tekintve;

k) az összes n-ed rendű páratlan permutációk halmaza a szorzás műveletét tekintve;

l) az $\mathbb{R}^n$ halmaz összes n-dimenziós vektora az összeadás műveletét tekintve az $\mathbb{R}$ felett;

m) a sík összes elforgatásának halmaza egy rögzített pont körül az elforgatások folyamatos műveletét tekintve;

n) a sík összes párhuzamos eltolásának halmaza a párhuzamos eltolások folyamatos műveletét tekintve!

2. Bizonyítsa be, hogy egy tetszőleges G csoportban egyetlen egységelem és egyetlen inverz elem létezik a G csoport tetszőleges elemére!

3. Legyen $G - e$ egységelemet tartalmazó csoport a szorzás műveletét nézve. Bizonyítsa be, hogyha tetszőleges $a \in G$ elemre $a^2 = e$, akkor a G – Abel-csoport!

4. Legyen G_1, G_2 – megfelelően e_1 és e_2 egységelemeket tartalmazó izomorf csoportok és $f : G_1 \to G_2$ – olyan bijektív leképezés, hogy tetszőleges $a, b \in G_1$ elemekre $f(ab) = f(a)f(b)$. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges $a \in G_1$ elemre $f(e_1) = e_2$ és $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$!

5. Bizonyítsa be, hogy az egész számok $\mathbb{Z}$ csoportja az összeadás műveletére nézve izomorf lesz egy adott természetes n szám egész többszöröseinek $n\mathbb{Z}$ csoportjával az összeadás műveletét tekintve!

6. Bizonyítsa be, hogy a valós számok csoportja az összeadásra nézve izomorf lesz pozitív egész számok csoportjával a szorzás műveletét tekintve!

7. Bizonyítsa be, hogy egy tetszőleges n-edrendű csoport izomorf lesz az n-edfokú permutációk S_n csoportjának valamely részcsoportjával!

8. Keresse meg az összes 3-adrendű csoportot (az izomorfizmus pontosságával)!

9. Keresse meg a $\mathbb{Z}^+$ egész számok csoportjának összes részcsoportját az összeadás műveletére nézve!

10. Írja ki a 3-adrendű permutációk S_3 csoportjának összes részcsoportját!

11. Az alábbi halmazok közül melyek alkotnak gyűrűt (testet) a megadott műveletre nézve:

a) az összes páros egész szám halmaza az összeadás és szorzás műveletét tekintve;

b) egy adott természetes n szám egész többszöröseinek halmaza az összeadás és szorzás műveletét tekintve;

c) az összes racionális szám halmaza az összeadás és szorzás műveletét tekintve;

d) az összes valós számok halmaza az összeadás és szorzás műveletét tekintve;

e) az összes komplex szám halmaza az összeadás és szorzás műveletét tekintve;

f) az $a + b\sqrt{2}$ alakú valós számok halmaza, ahol a, b – egész számok, az összeadás és szorzás műveletét tekintve;

g) az $a + b\sqrt[3]{3}$ alakú valós számok halmaza, ahol a, b – racionális számok, az összeadás és szorzás műveletét tekintve;

h) az $a + bi$ alakú komplex számok halmaza, ahol a, b − egész számok, az összeadás és szorzás műveletét tekintve;

i) az $a + bi$ alakú komplex számok halmaza, ahol a, b − racionális számok, az összeadás és szorzás műveletét tekintve;

j) az összes egész elemű n-es mátrixok halmaza az összeadás és szorzás műveletét tekintve;

k) az összes valós elemű n-es mátrixok halmaza az összeadás és szorzás műveletét tekintve;

l) az összes a, b racionális elemű $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$ alakú mátrix halmaza az összeadás és szorzás műveletét tekintve!

12. Legyen K − 1 egységelemet tartalmazó gyűrű. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges $a, b \in K$ elemekre igazak a $-(-a) = a,\ (-1) \cdot a = -a,\ (-a)(-b) = ab$ egyenlőségek!

13. Bizonyítsa be, hogy a valós elemű n-es mátrixok gyűrűjében csakis az elfajult mártixok lesznek nullosztók!

14. Bizonyítsa be, hogy az összes $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ alakú mátrixok halmaza, ahol a, b – valós számok, a mátrixok összeadásának és szorzásának műveletét tekintve testet alkot, amely izomorf a komplex számok testével!

15. Bizonyítsa be, hogy az $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$ alakú elemekből álló mátrixok teste izomorf az $a + b\sqrt{2}$ alakú elemekből álló számok testével (a, b racionális számok)!

14. A polinomok gyűrűje

Példafeladatok

1. Határozzuk meg az $(x^3+x^2-x-1)(x^2-2x-1)$ polinomok szorzatát a valós számok teste felett!

Megoldás. Tetszőleges $a_n x^n+\cdots+a_1 x+a_0$ polinom felírható, mint $n+1$ polinom összege (ezeket *egytagoknak* nevezzük) $a_n x^n,\dots,a_1 x, a_0$. Figyelembe véve ezt és felhasználva az asszociatívitás, kommutatívitás, disztributívitás tulajdonságait a polinomok összeadására és szorzására azt kapjuk, hogy

$$(x^3+x^2-x-1)(x^2-2x-1)=$$

$$=x^5-2x^4-x^3+x^4-2x^3-x^2-x^3+2x^2+x-x^2+2x+1=$$

$$=x^5-x^4-4x^3+3x+1.$$

2. Osszuk el az $f(x)=x^3-3x^2-x-1$ polinomot a $g(x)=3x^2-2x+1$ -re a valós számok teste felett!

Megoldás. Az $f(x)$ polinom

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x) \tag{1}$$

alakban való kifejezéséhez, az $a_{k_1}x^{k_1}$ egytagot olyan módon adjuk meg, hogy az $f_1(x)=f(x)-a_{k_1}x^{k_1}g(x)$ polinom fokszáma kisebb legyen a $g(x)$ fokszámától. Ezután kiválasztjuk az $a_{k_2}x^{k_2}$ egytagot úgy, hogy $f_2(x)=f_1(x)-a_{k_2}x^{k_2}g(x)$ fokszáma kisebb legyen, mint a $g(x)$ fokszáma és így tovább. Az egyik ilyen lépésnél az $f_n(x)$ polinom fokszáma kisebb lesz a $g(x)$ fokszámától, vagy $f_n(x)=0$. Akkor az

$$f(x)=\left(a_{k_1}x^{k_1}+a_{k_2}x^{k_2}+\cdots+a_{k_{n-1}}x^{k_{n-1}}\right)g(x)+f_n(x)$$

egyenlet az $f(x)$ polinom felírása lesz az (1)-es alakban.

A feltételben megadott polinomra a fentebb vázolt műveleteket a következő ábrán illusztráljuk:

$$\begin{array}{l|l} x^3-3x^2-\ x-1 & 3x^2-2x+1 \\ \cline{2-2} x^3-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x & \frac{1}{3}x-\frac{7}{9} \\ \cline{1-1} -\frac{7}{3}x^2-\frac{4}{3}x-1 & \\ -\frac{7}{3}x^2-\frac{14}{9}x-\frac{7}{9} & \\ \cline{1-1} -\frac{26}{9}x-\frac{2}{9} & \end{array}$$

Tehát a feltételben megadott $f(x)$ polinom $g(x)$ polinomra való osztásakor a hányados és a maradék megfelelően az $\frac{1}{3}x-\frac{7}{9}$ és $-\frac{26}{9}x-\frac{2}{9}$ polinomok lesznek.

3. Milyen feltétel mellett fog osztódni az x^3+px+q polinom az x^2+mx+1 polinomra $(p,q,m\in\mathbb{R})$?

Megoldás. Tegyük fel, hogy az x^3+px+q polinom osztódik az x^2+mx+1 polinomra, vagyis

$$x^3+px+q=(x^2+mx+1)h(x) \qquad (2)$$

valamely $h(x)\in\mathbb{R}[x]$ polinomra. A polinomok szorzásának meghatározásából következik, hogy a $h(x)$ első fokú polinom és a következő alakban írható fel: $h(x)=ax+b$ $(a,b\in\mathbb{R};a\neq 0)$. Akkor a (2)-es egyenlőségből az alábbi egyenlőséget kapjuk

$$x^3+px+q=ax^3+(am+b)x^2+(bm-a)x-b.$$

Innen $a=1,\ am+b=0,\ bm-a=p,\ -b=q$. Ezekből az egyenletekből első sorban az következik, hogy az x^3+px+q és az x^2+mx+1 polinomok oszthatóságának szükséges feltétele a következő egyenlőségek rendszere: $m=q,\ \ p=-q^2-1$. Nem nehéz meggyőződni arról, hogy ezen egyenlőségekből következik a feltételekben megadott polinomok oszthatósága.

4. Keressük meg az $f(x)=x^5-2x^4+x^3+7x^2-12x+10$ és a $g(x)=3x^4-6x^3+$ $+5x^2+2x-2$ polinomok legnagyobb közös osztóját!

Megoldás. Az $f(x)$ és $g(x)$ polinomok legnagyobb közös osztóját Euklideszi algoritmusa alapján fogjuk keresni. Mivel a polinomok legnagyobb közös osztója egy nem nullás szorzó(tényező) pontosságával fejeződik ki, ezért, hogy elkerüljük a tört együtthatókat, megengedett, hogy szorozzuk az osztót és az osztandót egy bármilyen nem nulla számra. Ez a művelet nem csupán az osztási folyamat elején, de a folyamat menete során is elvégezhető.

1. lépés. Osztjuk a $3f(x)$ polinomot a $g(x)$-re:

$$3x^5-6x^4+3x^3+21x^2-36x+30=$$

$= x(3x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 2x - 2) + (-2x^3 + 19x^2 - 34x + 30).$

Megkapjuk az $r_1(x) = -2x^3 + 19x^2 - 34x + 30$ maradékot.

2. lépés. Osztjuk a $2g(x)$ polinomot a $-r_1(x)$-re. Ezt a következő ábrát felhasználva végezzük el:

$$\begin{array}{rl|l} & 6x^4 - 12x^3 + 10x^2 + 4x - 4 & 2x^3 - 19x^2 + 34x - 30 \\ & \underline{6x^4 - 57x^3 + 102x^2 - 90x} & \hline \\ \text{(szorozzuk 2-re)} & 45x^3 - 92x^2 + 94x - 4 & 3x + 45 \\ & \underline{90x^3 - 184x^2 + 188x - 8} & \\ & 90x^3 - 855x^2 + 1530x - 1350 & \\ & \underline{671x^2 - 1342x + 1342} & \\ \text{(szorozzuk } \frac{1}{671}\text{-re)} & x^2 - 2x + 2 & \end{array}$$

Megjegyzés. Az $r_2(x) = x^2 - 2x + 2$ polinom nem lesz a $2g(x)$ polinom osztásának maradéka a $-r_1(x)$-re való osztásakor, viszont a $\big(f(x), g(x)\big) = (-r_1(x), r_2(x))$.

3. lépés. Osztjuk a $-r_1(x)$ polinomot az $r_2(x)$-re:

$2x^3 - 19x^2 + 34x - 30 = (2x - 15)(x^2 - 2x + 2).$

Mivel a maradék az utolsó osztás során 0-val egyenlő, a feltételekben megadott $f(x)$ és $g(x)$ polinomok legnagyobb közös osztója az $r_2(x) = x^2 - 2x + 2$ polinom lesz.

Gyakorlatok

1. Számítsa ki az alábbi polinomok szorzatát a komplex számok teste felett:

a) $(2x^4 - x^3 + x^2 + x + 1)(x^2 - 3x + 1);$

b) $(3x^5 + 2x^2 - 1)(2x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4);$

c) $((1 - i)x^3 + (2 + 3i)x^2 - ix + 1 + i)((1 + i)x - 3);$

d) $(ix^3 - 4)(-x^4 + (3 - i)x^2 + 7 - i)!$

2. Ossza el az $f(x)$ polinomot a $g(x)$ polinomra a komplex számok teste felett, ha:

a) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6, \qquad g(x) = x^2 - 3x + 1;$

b) $f(x) = 3x^5 + 2x^2 - 1, \qquad g(x) = 3x^3 - 3x - 2;$

c) $f(x) = (-1 + 5i)x^3 - (6 + 11i)x^2 + (3 + 5i)x + 2 - 5i,$
$g(x) = (1 + i)x - 3;$

d) $f(x) = (-1 + 3i)x^4 + 9x^3 + (-9 + 3i)x^2 + (7 + 6i)x - (2 + 2i),$
$g(x) = ix^2 + (2 - i)x - 2 + 3i!$

3. Milyen feltételek mellett fog osztódni az $f(x)$ polinom a $g(x)$ polinomra a valós számok teste felett, ha:

a) $f(x) = ax^3 + bx^2 + 1, \quad g(x) = (x-1)^2 \quad (a, b \in \mathbb{R})$;

b) $f(x) = x^4 + px^2 + q, \quad g(x) = x^2 + mx + 1 \quad (p, q, m \in \mathbb{R})$?

4. Határozza meg a polinomok legnagyobb közös osztóját:

a) $x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ és $x^3 + x^2 - x - 1$;

b) $x^5 + x^4 - x^3 - 2x - 1$ és $3x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x - 2$;

c) $x^6 - 7x^4 + 8x^3 - 7x + 7$ és $3x^5 - 7x^3 + 3x^2 - 7$;

d) $x^5 + x^4 - x^3 - 3x^2 - 3x - 1$ és $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1$;

e) $x^4 - 10x^2 + 1$ és $x^4 - 4\sqrt{2}x^3 + 6x^2 + 4\sqrt{2}x + 1$;

f) $x^4 - 4x^3 + 1$ és $x^3 - 3x^2 + 1$!

5. Felhasználva az Euklideszi algoritmust, határozza meg azokat az $u(x)$ és $v(x)$ polinomokat, melyekre teljesül, hogy $u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x)$, ahol $d(x) = (f(x), g(x))$, hogyha:

a) $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2, \quad g(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$;

b) $f(x) = x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 1, \quad g(x) = x^4 + 2x^3 + x + 2$;

c) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 2, \quad g(x) = x^2 - x + 1$;

d) $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1, \quad g(x) = x^2 - x - 1$!

6. A határozatlan együtthatók módszerének segítségével határozza meg az $u(x)$ és $v(x)$ polinomokat úgy, hogy teljesüljön: $u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$, hogyha:

a) $f(x) = x^3, \quad g(x) = (x-1)^2$;

b) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1, \quad g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$!

7. Határozza meg azt a legkisebb fokszámú polinomot, mely az $(x-1)^2$-re való osztásakor $2x$ maradékot, az $(x-1)^3$-re való osztásakor pedig $3x$ maradékot ad!

8. Legyen $u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x)$, ahol $d(x)$ — az $f(x)$ és $g(x)$ polinomok legnagyobb közös osztója. Mivel egyenlő az $u(x)$ és $v(x)$ polinomok legnagyobb közös osztója?

15. A polinomok gyökei

Példafeladatok

1. Osszuk el az $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8$ polinomot a $g(x) = x - 1$ polinomra!

Megoldás. Mivel a $g(x)$ — lineáris polinom 1-es főegyütthatóval, ezért az $f(x)$ polinomot a $g(x)$ polinomra Horner-elrendezéssel osztjuk. Szerkesztünk egy táblázatot, melynek első sorában az $f(x)$ polinom együtthatói állnak kezdve a főegyütthatótól. A másodikban pedig a hányados és a maradék megfelelő együtthatói, amelyeket folyamatosan fogjuk kiszámítani, valamint a baloldalon elhelyezzük a $g(x)$ gyökét, esetünkben az 1-est.

	1	-2	4	-6	8
1	1	$1 \cdot 1 - 2 = -1$	$1 \cdot (-1) + 4 = 3$	$1 \cdot 3 - 6 = -3$	$1 \cdot (-3) + 8 = 5$

Így az $x^3 - x^2 + 3x - 3$ — hányados, az 5 — pedig maradék az $f(x)$ polinom $g(x)$-re való osztásakor.

2. Bontsuk fel az $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1 \in \mathbb{R}[x]$ polinomot az $x + 1$ lineáris polinomok hatványi szerint (vagyis írjuk fel a következő alakban: $f(x) = a_n(x+1)^n + \cdots + a_1(x++1) + a_0$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ és $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$)!

Megoldás. Legyen $f(x) = a_n(x+1)^n + \cdots + a_1(x+1) + a_0$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ és $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Akkor könnyen belátható, hogy $n = 4$ és $a_0 = 0$ — maradék, az $f_1(x) = a_4(x+1)^3 + a_3(x+1)^2 + a_2(x+1) + a_1$ pedig hányados az $f(x)$ polinom $x + 1$-re való osztásánál. A következőekben hasonlóan azt kapjuk, hogy a_1 — maradék, az $f_2(x) = a_4(x+1)^3 + a_3(x+1) + a_2$— hányados az $f_1(x)$ polinom $x + 1$-re való osztásánál; a_2 — maradék, az $f_3(x) = a_4(x+1) + a_3$— hányados az $f_2(x)$ polinom $x + 1$-re való osztásánál; végül, a_3 — maradék, az $f_4(x) = a_4$ — hányados az $f_3(x)$ polinom $x + 1$-re való osztásánál. Tehát az $a_0, \ldots, a_4$ együtthatók meghatározásához folyamatosan osztani kell előbb az $f(x)$-et majd pedig a megfelelő hányadosokat $x + 1$-re. Ezt a Horner-elrendezés algoritmusának segítségével végezzük el, felhasználva az úgy nevezett „bővített” Horner-elrendezést.

	1	2	-3	-4	1
-1	1	1	-4	0	**1**
-1	1	0	-4	**4**	
-1	1	-1	$\mathbf{-3}$		
-1	1	$\mathbf{-2}$			
-1	**1**				

A kijelölt számok a táblázatban megadják a keresett $a_0, \dots, a_4$ együtthatókat. Tehát,

$$f(x) = (x+1)^4 - 2(x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 4(x+1) + 1.$$

3. Határozzuk meg az $f(x) = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16$ polinom -2-es gyökének multiplicitását!

Megoldás. Mivel az $f(x)$ polinom -2-es gyökének multiplicitása egyenlő a legnagyobb olyan természetes k számmal, melyre igaz, hogy az $f(x)$ osztódik az $(x+2)^k$-ra, ezért, mint ahogy az előző példákban is, alkalmazzuk Horner-elrendezés algoritmusát ezen szám meghatározásához.

	1	7	16	8	-16	-16
-2	1	5	6	-4	-8	0
-2	1	3	0	-4	0	
-2	1	1	-2	0		
-2	1	-1	0			
-2	1	-3				

Tehát, $f(x) = (x+2)^4(x-1)$. Innen azt kapjuk, hogy $f(x)$ polinom -2-es gyökének multiplicitása 4-el egyenlő.

4. Bizonyítsuk be, bármilyen háromnál nagyobb természetes n számra az 1-es szám háromszoros gyöke(3 a multiplicitása) lesz az $f(x) = x^{2n} - nx^{n+1} + nx^{n-1} - 1$ polinomnak!

Megoldás. Előbb leellenőrizzük, hogy az 1-es gyöke-e az $f(x)$ polinomnak:

$$f(1) = 1^{2n} - n1^{n+1} + n1^{n-1} - 1 = 0.$$

Ezek után kiszámítjuk az $f(x)$ polinom első három deriváltját, aztán pedig megfelelően ezen deriváltak értékét az $x = 1$ ismeretlen értékénél.

$f'(x) = 2nx^{2n-1} - n(n+1)x^n + (n-1)nx^{n-2}$,

$f''(x) = (2n-1)2nx^{2n-2} - n^2(n+1)x^{n-1} + (n-2)(n-1)nx^{n-3}$,

$f'''(x) = (2n-2)(2n-1)2nx^{2n-3} - (n-1)n^2(n+1)x^{n-2} +$

$+(n-3)(n-2)(n-1)nx^{n-4}$;

$f'(1) = 2n - n(n+1) + (n-1)n = 0$,

$f''(1) = (2n-1)2n - n^2(n+1) + (n-2)(n-1)n = 0$,

$f'''(1) = (2n-2)(2n-1)2n - (n-1)n^2(n+1) +$

$+(n-3)(n-2)(n-1)n = 2n^3 - n^2 \neq 0$.

Ebből az következik, hogy a -1 az $f(x)$ polinom gyökének multiplicitása 3-mmal egyenlő.

5. Keressük meg az $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ polinom gyökei négyzeteinek összegét?

Megoldás. Legyen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — a feltételben megadott polinom összes gyöke. Akkor

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2 = (\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n)^2 -$$

$$-2(\xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3 + \cdots + \xi_1\xi_n + \cdots + \xi_{n-1}\xi_n) = (-a_1)^2 - 2a_2 = {a_1}^2 - 2a_2.$$

6. Bontsuk fel az $f(x) = x^4 + 4$ polinomot irreducibilis szorzatokra a valós számok teste felett!

Megoldás. Előbb felbontjuk az $f(x)$ polinomot lineáris szorzatokra a komplex számok teste felett. Ehhez megkeressük a polinom gyökeit. Ezek nyilvánvalóan a -4 negyedfokú gyökei lesznek:

$$\xi_1 = 1 + i, \qquad \xi_2 = -1 + i, \qquad \xi_3 = 1 - i, \qquad \xi_4 = -1 - i.$$

Akkor

$$x^4 + 4 = \big((x-1-i)(x-1+i)\big)\big((x+1-i)(x+1+i)\big) =$$

$$= (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2).$$

Az $x^2 - 2x + 2$ és $x^2 + 2x + 2$ polinomok irreducibilisek a valós számok teste felett, mivel nem rendelkeznek valós gyökökkel, ezért nem bonthatóak fel valós lineáris polinomok szorzataként.

Gyakorlatok

1. A Horner-elrendezés algoritmusának segítségével számítsa ki az $f(x)$ polinom $f(c)$ értékét (amikor $x = c$), ha:

a) $f(x) = 5x^4 - 19x^3 - 7x^2 + 9x + 3, \qquad c = 2;$

b) $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 5x^2 + x + 33, \qquad c = -2;$

c) $f(x) = x^5 + (1 + 2i)x^4 - (1 + 3i)x^2 + 7, \qquad c = -2 - i!$

2. Bontsa fel az $f(x)$ polinomot az $x - c$ hatványai szerint, valamint keresse meg azok deriváltjainak értékét amikor $x = c$, ha:

a) $f(x) = x^5, \qquad c = 1;$

b) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 50x + 90, \qquad c = 2;$

c) $f(x) = x^4 + 2ix^3 - (1 + i)x^2 - 3x + 7 + i, \qquad c = -i;$

d) $f(x) = x^4 + (3 - 8i)x^3 - (21 + 18i)x^2 - (33 - 20i)x + 7 + 18i, \qquad c = -i + 2i!$

3. Határozza meg az $f(x)$ polinom c gyökének multiplicitását:

a) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8, \qquad c = 2;$

b) $f(x) = x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 36x^2 - 27x - 54, \qquad c = 3;$

4. Az a milyen értéke mellett lesz az $x^5 - ax^2 - ax + 1$ polinom -1-es gyökének multiplicitása legalább 2?

5. Az a és b melyik értékénél osztódik az a) $ax^4 + bx^3 + 1$; b) $ax^n + bx^{n-1} + 1$ polinom az $(x - 1)^2$?

6. Keresse meg azt a feltételt, ami mellett az $x^5 - ax^3 - b$ polinom $(a, b \in \mathbb{R})$ rendelkezik nem nulla gyökkel, melynek multiplicitása 2!

7. Bizonyítsa be, hogy az $1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n$ polinom nem rendelkezik többszörös gyökökkel!

8. Bontsa fel az $f(x)$ polinomot irreducibilis polinomok szorzatába a komplex számok teste felett, ha:

a) $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$; b) $f(x)=x^4+10x^2+1$;

c) $f(x)=x^8+27x^2$; d) $f(x)=x^3-6x^2+1$!

9. Bontsa fel az $f(x)$ polinomot irreducibilis polinomok szorzatába a komplex számok teste felett, ha:

a) $f(x)=x^6+27$; b) $f(x)=x^{2n}-2x^n+2$;

c) $f(x)=x^{2n}+x+1$; d) $f(x)=x^4-ax^2+1 \quad (-2<a<2)$;

e) $f(x)=x^6-x^3+1$; f) $f(x)=x^{12}+x^8+x^4+1$!

10. Határozza meg a komplex számok teste felett azt a polinomot, melynek legkisebb a fokszáma a megadott gyökök alapján:

a) 1 — kétszeres gyök, és 2, 3, $1+i$ — egyszeres gyökök;

b) i — háromszoros gyök, és -1, $-i$ — egyszeres gyökök!

11. Határozza meg a valós számok teste felett azt a polinomot, melynek legkisebb a fokszáma a megadott (komplex) gyökök alapján:

a) 1 — kétszeres gyök, és 2, 3, $1-i$ — egyszeres gyökök;

b) $(2-3i)$ — háromszoros gyök, és $-i$ — egyszeres gyök!

12. Bizonyítsa be, hogy az $x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+1}$ polinom osztódik az x^2+x+1 polinomra bármilyen természetes m, n, p számokra!

13. Milyen feltételek mellett osztódik az $x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+1}$ polinom az x^2+x+1 polinomra?

14. $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ gyökei az $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ polinomnak. Milyen gyökei vannak az alábbi polinomoknak:

a) $a_n x^n - a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} - \cdots + (-1)^n a_0$;

b) $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$;

c) $a_n x^n + a_{n-1}bx^{n-1} + a_{n-2}b^2 x^{n-2} + \cdots + a_0 b^n$?

15. Keresse meg az összefüggést az $x^3 + px^2 + qx + r$ polinom együtthatói között, melynek egyik gyöke egyenlő a másik két gyök összegével!

16. Határozza meg a λ-t úgy, hogy az $x^3 - 7x + \lambda$ polinom egyik gyöke egy másik gyökének kétszerese legyen!

17. Az $2x^3 - x^2 - 7x + \lambda$ polinom két gyöke egyenlő 1-el. Határozza meg a λ értékét!

18. Határozza meg az a, b, c –t, hogy azok az $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ egyenlet megoldásai legyenek!

16. Irreducibilis polinomok. Polinomok a racionális számok teste felett

Példafeladatok

1. Legyen p – tetszőleges prím szám. Bizonyítsuk be, hogy az $f_p(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$ polinom irreducibilis lesz a racionális számok $\mathbb{Q}$ teste felett!

Megoldás. Legyen $g(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ – tetszőleges, $\mathbb{Q}$ test feletti polinom. Tetszőleges $c \in \mathbb{Q}$ elemre $g(x + c)$ keresztül megjelöljük a következő polinomot

$$a_n \cdot (x + c)^n + a_{n-1} \cdot (x + c)^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot (x + c) + a_0.$$

Ha valamely $u(x), v(x) \in \mathbb{Q}[x]$ polinomokra $g(x) = u(x)v(x)$, akkor

$$g(x + c) = u(x + c) \cdot v(x + c) \tag{1}$$

tetszőleges $c \in \mathbb{Q}$ elemre. Valóban, tetszőleges $\gamma \in \mathbb{Q}$ elemre $g(\gamma) = u(\gamma)v(\gamma)$, és ezért

$$g(\gamma + c) = u(\gamma + c) \cdot v(\gamma + c).$$

Mivel a γ tetszőleges, így kapjuk az (1).

Nyilvánvaló, hogy $(x - 1) \cdot f_p(x) = x^p - 1$. Innen

$$x \cdot f_p(x + 1) = (x + 1)^p - 1 =$$

$$= x^p + C_p^{p-1}x^{p-1} + C_p^{p-2}x^{p-2} + \cdots + C_p^1 x + 1 - 1 =$$

$$= x(x^{p-1} + C_p^{p-1}x^{p-2} + C_p^{p-2}x^{p-3} + \cdots + C_p^1).$$

Innen pedig kapjuk, hogy

$$f_p(x + 1) = x^{p-1} + C_p^{p-1}x^{p-2} + C_p^{p-2}x^{p-3} + \cdots + C_p^1. \tag{2}$$

Eisenstein-féle irreducibilitási kritérium alapján a (2) egyenlőség jobb oldalán szereplő polinom irreducibilis lesz a $\mathbb{Q}$ test felett, amennyiben tetszőleges $j \in \{1, \dots, p - 1\}$-re a C_p^j együttható osztódik p-re, a $C_p^1 = p$ szabad tag pedig osztódik p^2-re. Tehát az $f_p(x + 1)$ polinom irreducibilis a $\mathbb{Q}$ test felett. Ez elsősorban azt jelenti, hogy az $f_p(x)$ polinom irreducibilis a $\mathbb{Q}$ test felett.

2. Keressük meg az $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15x - 14$ polinom racionális gyökeit!

Megoldás. Amennyiben az $f(x)$ polinom főegyütthatója 1 és egészszámú polinom, akkor mint ismeretes, ezen polinom összes racionális gyöke egész szám lesz. Ezért ezen gyököket a szabad tag osztói között kell keresnünk. Ilyen osztók a következők: $\pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14$. A Horner-elrendezés algoritmusának segítségével kiszámítjuk előbb az $f(x)$ polinom értékét az $x = \pm 1$ esetben.

		1	-6	15	-14
1		1	-5	10	-4
-1		1	-7	22	-36

Továbbá a $\pm 2, \pm 7, \pm 14$ osztók közül kiválasztunk olyan d osztókat, hogy az $\frac{f(1)}{d-1}$, $\frac{f(-1)}{d+1}$ számok egészek legyenek. Ezeknek a feltételeknek csak egy felel meg az adott osztók közül, mégpedig a 2. Kiszámítjuk tehát az $f(x)$ polinom értékét az $x = 2$ esetben.

		1	-6	15	-14
2		1	-4	7	0

Tehát az $f(x)$ polinom egyetlen racionális gyöke a 2.

Gyakorlatok

1. Legyen P – az F test részteste és $g(x) \in P[x]$. Az alábbi állítások közül melyek igazak:

a) ha $g(x)$ – irreducibilis polinom a P test felett, akkor irreducibilis lesz az F test felett is;

b) ha $g(x)$ – irreducibilis polinom a F test felett, akkor irreducibilis lesz az P test felett is;

c) ha $g(x)$ – reducibilis polinom a P test felett, akkor reducibilis lesz az F test felett is;

d) ha $g(x)$ – reducibilis polinom a F test felett, akkor reducibilis lesz az P test felett is?

2. Legyen F – test. Bizonyítsa be, hogy a 2-od vagy 3-ad fokszámú polinom az F felett akkor és csak akkor lesz irreducibilis, ha létezik gyöke az F testben. Igaz lesz-e ez az állítás a 4-ed fokszámú polinomok esetére is?

3. Legyen $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ – irreducibilis polinom a $\mathbb{Q}$ felett. Bizonyítsa be, hogy az $f(x)$ polinomnak nincsenek többszörös komplex gyökei!

4. Eisenstein-féle irreducibilitási kritériumot felhasználva bizonyítsa be az alábbi polinomok irreducibilisságát a $\mathbb{Q}$ felett:

a) $x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 6x + 2$; b) $x^5 - 12x^3 + 36x - 12$;

c) $x^4 - x^3 + 2x + 1$; d) $x^{(p-1)p^k} + x^{(p-2)p^k} + \cdots + x^{p^k} + 1$,

ahol p – természetes prímszám, $k \in \mathbb{N}$!

5. Bizonyítsa be, hogy az egész számú $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ polinom irreducibilis lesz a $\mathbb{Q}$ test felett, ha nincsenek egész gyökei és nem osztódik egyetlen $x^2 + \frac{cm-am^2}{d-m^2}x + m$ alakú polinomra sem, ahol m – a d szám osztója!

6. Az előző feladat segítségével bontsa fel szorzatokra a következő polinomokat vagy bizonyítsa irreducibilisságukat:

a) $x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 3x - 9$; b) $x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2x - 6$!

7. Bizonyítsa be, hogyha az irreducibilis (egyszerűsíthetetlen) $\frac{p}{q}$ tört az egész számú $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ polinom gyöke, akkor:

a) q az a_n szám osztója;

b) p az a_0 szám osztója;

c) $p - mq$ az $f(m)$ szám osztója tetszőleges egész m számra!

8. Keresse meg az alábbi polinomok racionális gyökeit:

a) $x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 13x - 24$;

b) $x^5 - 7x^3 - 12x^2 + 6x + 36$;

c) $6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12$;

d) $24x^4 - 42x^3 - 77x^2 + 56x + 60$;

e) $10x^4 - 13x^3 + 15x^2 - 18x - 24$;

f) $x^6 - 6x^5 + 11x^4 - x^3 - 18x^2 + 20x - 8$.

9. Bizonyítsa be, hogy az egész számú $f(x)$ polinomnak nincsenek egész gyökei, ha $f(0)$ és $f(1)$ – páratlan számok!

10. Keresse meg az alábbi polinomok legnagyobb közös osztóját:

a) $(x-1)^3(x+2)^2(x-3)(x+4)$ és $(x-1)^2(x+2)(x+5)$;

b) $(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)$ és $(x+1)(x^2+1)(x^3+1)(x^4+1)$;

c) x^n-1 és x^m-1 $(n,m \in \mathbb{N})$!

17. A lineáris tér bázisa

Példafeladat

Bizonyítsuk be, hogy az $a_1 = (1,1,1,1)$, $a_2 = (1,0,1,1)$, $a_3 = (1,1,0,1)$, $a_4 = (1,1,1,0)$ vektorrendszer az $\mathbb{R}^4$ vektoriális tér bázisa lesz a valós számok $\mathbb{R}$ teste fölött! Keressük meg az $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4) \in \mathbb{R}^4$ vektor koordinátáinak képleteit ebben a bázisban! Milyenek lesznek a $c = (-1,0,-1,0)$ vektor koordinátái az a_1, a_2, a_3, a_4 bázisban?

Megoldás. Az a_1, a_2, a_3, a_4 vektorrendszer a valós számok $\mathbb{R}$ teste fölött az $\mathbb{R}^4$ vektoriális tér bázisa lesz akkor és csakis akkor, ha az ezen vektorok elemeiből álló Δ determináns nem egyenlő 0-val. Kiszámoljuk ezt a determinánst.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 .$$

Tehát az a_1, a_2, a_3, a_4 vektorrendszer az $\mathbb{R}^4$ tér bázisa.

Legyenek κ_1, κ_2, κ_3, κ_4 – az x vektor koordinátái az a_1, a_2, a_3, a_4 bázisban. Vagyis $x = \kappa_1 a_1 + \kappa_2 a_2 + \kappa_3 a_3 + \kappa_4 a_4$. Akkor fennállnak az alábbi egyenlőségek:

$$\begin{cases} \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4 = \chi_1, \\ \kappa_1 \quad\quad + \kappa_3 + \kappa_4 = \chi_2, \\ \kappa_1 + \kappa_2 \quad\quad + \kappa_4 = \chi_3, \\ \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 \quad\quad = \chi_4. \end{cases} \tag{1}$$

Ezáltal az x vektor koordinátáinak meghatározásához az a_1, a_2, a_3, a_4 bázisban az (1)-es lineáris egyenletrendszert szükséges megoldani a κ_1, κ_2, κ_3, κ_4 ismeretlenekre vonatkozóan. Ezért elvégezzük az alábbi átalakításokat a kapott rendszer kibővített mátrixa fölött.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & \chi_1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \chi_2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \chi_3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \chi_4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & \chi_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \chi_2 - \chi_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \chi_3 - \chi_1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \chi_4 - \chi_1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \chi_2 + \chi_3 + \chi_4 - 2\chi_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \chi_2 - \chi_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \chi_3 - \chi_1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \chi_4 - \chi_1 \end{array}\right).$$

Ebből következik, hogy $\kappa_1 = -2\chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \chi_4$, $\kappa_2 = \chi_1 - \chi_2$, $\kappa_3 = \chi_1 - \chi_3$, $\kappa_4 = \chi_1 - \chi_4$. A $c = (-1, 0, -1, 0)$ vektor számára a következő koordináta értékeket kapjuk ebben a bázisban: $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = -1$, $\kappa_3 = 0$, $\kappa_4 = -1$, vagyis $c = 1 \cdot a_1 - 1 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 - 1 \cdot a_4$.

Gyakorlatok

Bizonyítsa be, hogy az a_1, a_2, a_3, a_4 vektorrendszer az $\mathbb{R}^4$ vektoriális tér bázisa lesz a valós számok $\mathbb{R}$ teste fölött! Keresse meg az $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4) \in \mathbb{R}^4$ vektor koordinátáinak képleteit ebben a bázisban! Milyenek lesznek a $c \in \mathbb{R}^4$ vektor koordinátái az a_1, a_2, a_3, a_4 bázisban?

1. $a_1 = (2,1,1,3)$, $a_2 = (3,3,1,4)$, $a_3 = (1,4,2,4)$, $a_4 = (4,1,2,2)$, $c = (14,6,9,12)$.

2. $a_1 = (2,1,2,2)$, $a_2 = (2,1,1,2)$, $a_3 = (2,2,1,1)$, $a_4 = (1,1,1,0)$, $c = (1,-1,1,-1)$.

3. $a_1 = (1,1,1,1)$, $a_2 = (1,-1,1,-1)$, $a_3 = (2,1,1,1)$, $a_4 = (3,4,1,1)$, $c = (3,-3,0,12)$.

4. $a_1 = (-1,2,2,1)$, $a_2 = (0,3,2,1)$, $a_3 = (1,1,4,2)$, $a_4 = (1,-2,1,3)$, $c = (2,-4,5,6)$.

5. $a_1 = (3,-1,1,3)$, $a_2 = (2,0,6,1)$, $a_3 = (1,-1,1,1)$, $a_4 = (2,4,1,1)$, $c = (2,4,3,-1)$.

6. $a_1 = (-2,5,0,3)$, $a_2 = (1,3,2,6)$, $a_3 = (1,1,1,0)$, $a_4 = (2,2,2,2)$, $c = (3,6,9,-2)$.

7. $a_1 = (4,-1,3,2)$, $a_2 = (2,3,1,5)$, $a_3 = (2,-3,1,1)$, $a_4 = (2,3,2,1)$, $c = (2,-4,3,7)$.

8. $a_1 = (2,1,3,1)$, $a_2 = (5,2,2,5)$, $a_3 = (3,1,6,0)$, $a_4 = (0,6,0,7)$, $c = (0,-6,-5,-11)$.

9. $a_1 = (4,3,2,1)$, $a_2 = (-1,3,3,3)$, $a_3 = (2,1,2,1)$, $a_4 = (1,5,0,1)$, $c = (-1,-1,2,2)$.

10. $a_1 = (0,5,1,3)$, $a_2 = (2,4,0,1)$, $a_3 = (1,3,1,5)$, $a_4 = (3,6,0,1)$, $c = (3,8,-2,-10)$.

18. Átmeneti mátrix egyik bázisból a másikba

Példafeladat

Bizonyítsuk be, hogy az $a_1 = (1,1,1)$, $a_2 = (2,1,1)$, $a_3 = (3,2,3)$ és a $b_1 = (0,1,0)$, $b_2 = (1,1,2)$, $b_3 = (1,2,1)$ vektorrendszerek az $\mathbb{R}^3$ vektoriális tér bázisai! Keressük meg az átmeneti mátrixot és a koordináták átalakításának képleteit az egyik bázisból való átmenet során a másikba! Ezután határozzuk meg a $c = (1,2,3)$ vektor koordinátáit mindkét bázisban, és ellenőrizzük le a kapott eredményt a koordináták átalakítási képleteinek segítségével!

Megoldás. Hasonlóan, mint az előző fejezetben tettük, kiszámoljuk a determinánst, amelyet megfelelően az a_1, a_2, a_3 és a b_1, b_2, b_3 vektorok komponensei alkotnak.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -1, \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Amennyiben egyik determináns sem egyenlő 0-val, akkor az a_1, a_2, a_3 és a b_1, b_2, b_3 vektorrendszerek az $\mathbb{R}^3$ tér bázisai lesznek.

Megkeressük az átmeneti mátrixot az első bázisból a másodikba. Ehhez az szükséges, hogy a második bázis vektorait felírjuk az első bázis vektorai által. Legyen τ_{1j}, τ_{2j}, τ_{3j} – a b_j vektor koordinátái az a_1, a_2, a_3 bázisban, ahol $(j = 1,2,3)$, akkor

$$\begin{aligned} b_1 &= \tau_{11}a_1 + \tau_{21}a_2 + \tau_{31}a_3, \\ b_2 &= \tau_{12}a_1 + \tau_{22}a_2 + \tau_{32}a_3, \\ b_3 &= \tau_{13}a_1 + \tau_{23}a_2 + \tau_{33}a_3. \end{aligned} \qquad (1)$$

Az (1)-es vektorok egyenlőségeitől áttérve a megfelelő komponensek egyenlőségeihez három lineáris egyenletrendszert kapunk

$$\begin{cases} \tau_{11} + 2\tau_{21} + 3\tau_{31} = 0, \\ \tau_{11} + \tau_{21} + 2\tau_{31} = 1, \\ \tau_{11} + \tau_{21} + 3\tau_{31} = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \tau_{12} + 2\tau_{22} + 3\tau_{32} = 1, \\ \tau_{12} + \tau_{22} + 2\tau_{32} = 1, \\ \tau_{12} + \tau_{22} + 3\tau_{32} = 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} \tau_{13} + 2\tau_{23} + 3\tau_{33} = 1, \\ \tau_{13} + \tau_{23} + 2\tau_{33} = 2, \\ \tau_{13} + \tau_{23} + 3\tau_{33} = 1. \end{cases}$$

Mint ahogy ezen egyenletrendszerek mátrixai páronként egyenlők, így ezeket a rendszereket egyidejűleg oldjuk meg elvégezve az alábbi átalakításokat a mátrix felett, amely a_1, a_2, a_3 és a b_1, b_2, b_3 vektorok elemeiből áll.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Tehát,

$$F = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

– az átmeneti mátrix az a_1, a_2, a_3 bázisból a b_1, b_2, b_3 bázisba. Legyen κ_1, κ_2, κ_3 és κ'_1, κ'_2, κ'_3 – az $x \in \mathbb{R}^3$ vektor koordinátái megfelelően az a_1, a_2, a_3 és a b_1, b_2, b_3 bázisokban, vagyis

$$x = \kappa_1 a_1 + \kappa_2 a_2 + \kappa_3 a_3 = \kappa'_1 b_1 + \kappa'_2 b_2 + \kappa'_3 b_3 .$$

Akkor

$$\begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa'_1 \\ \kappa'_2 \\ \kappa'_3 \end{pmatrix}.$$

Leellenőrizzük ezt az egyenlőséget a $c = (1, 2, 3)$ vektor esetében. Előbb megkeressük a c vektor koordinátáit az a_1, a_2, a_3 bázisban, azután pedig a b_1, b_2, b_3 bázisban.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 3\\ 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right).$$

Tehát $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = -2$, $\kappa_3 = 1$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 1 & 3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{array}\right).$$

Tehát $\kappa'_1 = 2$, $\kappa'_2 = 2$, $\kappa'_3 = -1$. Megkapjuk a következő egyenlőség bizonyosságát

$$\begin{pmatrix}2\\ -2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0 & 4\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 2\\ -1\end{pmatrix}.$$

Gyakorlatok

Bizonyítsa be, hogy az a_1, a_2, a_3 és a b_1, b_2, b_3 vektorrendszerek az $\mathbb{R}^3$ vektoriális tér bázisai! Keresse meg az átmeneti mátrixot és a koordináták átalakításának képleteit az egyik bázisból való átmenet során a másikba. Ezután határozza meg a $c = (1,2,3)$ vektor koordinátáit mindkét bázisban, és ellenőrizze le a kapott eredményt a koordináták átalakítási képleteinek segítségével!

1. $a_1 = (1,-1,1)$, $a_2 = (2,-1,-1)$, $a_3 = (3,-2,1)$;

$b_1 = (-1,1,0)$, $b_2 = (2,-1,1)$, $b_3 = (1,0,0)$.

2. $a_1 = (3,3,-2)$, $a_2 = (1,-1,3)$, $a_3 = (11,6,2)$;

$b_1 = (-2,1,4)$, $b_2 = (3,-2,1)$, $b_3 = (-11,7,2)$.

3. $a_1 = (1,-1,1)$, $a_2 = (-1,2,0)$, $a_3 = (0,1,2)$;

$b_1 = (1,-1,1)$, $b_2 = (2,-1,0)$, $b_3 = (3,-2,0)$.

4. $a_1 = (1,-1,-1)$, $a_2 = (-1,2,0)$, $a_3 = (0,1,0)$;

$b_1 = (1,0,1)$, $b_2 = (1,-1,2)$, $b_3 = (2,-1,4)$.

5. $a_1 = (0,1,2)$, $a_2 = (1,-2,-1)$, $a_3 = (1,-1,2)$;

$b_1 = (-1,1,0)$, $b_2 = (2,-1,1)$, $b_3 = (1,0,2)$.

6. $a_1 = (2,1,1)$, $a_2 = (1,1,3)$, $a_3 = (3,2,5)$;

$b_1 = (1,1,1)$, $b_2 = (2,1,1)$, $b_3 = (3,1,3)$.

7. $a_1 = (1,-1,2)$, $a_2 = (2,1,1)$, $a_3 = (3,0,2)$;

$b_1 = (1,1,1)$, $b_2 = (-2,-1,1)$, $b_3 = (1,0,3)$.

8. $a_1 = (6,4,-1)$, $a_2 = (1,-2,2)$, $a_3 = (9,3,1)$;

$b_1 = (-3,7,8)$, $b_2 = (2,1,3)$, $b_3 = (0,-2,-3)$.

9. $a_1 = (4,3,2)$, $a_2 = (1,1,3)$, $a_3 = (2,2,5)$;

$b_1 = (5,4,3)$, $b_2 = (2,2,1)$, $b_3 = (1,6,-1)$.

10. $a_1 = (8,1,-1)$, $a_2 = (3,2,-3)$, $a_3 = (4,-1,2)$;

$b_1 = (1,2,-1)$, $b_2 = (4,4,-1)$, $b_3 = (3,0,2)$.

19. Műveletek lineáris alterekkel

Példafeladat

Keressük meg az $L_1 + L_2$ összeg dimenzióját és bázisát, valamint az $L_1 \cap L_2$ metszetet, ahol L_1 és L_2 az $\mathbb{R}^5$ tér lineáris alterei és L_1 az alábbi egyenletrendszer megoldásainak a tere:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0; \end{cases} \tag{1}$$

$L_2 = \langle a_1, a_2 \rangle$ – az $a_1 = (7,\ 2,\ -4,\ 1,\ 1)$, $a_2 = (10,\ -1,\ 0,\ -2,\ -6)$ vektorrendszerből előállított lineáris burok!

Megoldás. Meghatározzuk az adott feltételnek megfelelő lineáris homogén egyenletrendszer megoldásainak fundamentális rendszerét

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & -7 & 3 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 9 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 17 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tehát $b_1 = (-17,\ 4,\ 9,\ 1,\ 0)$ és $b_2 = (0,\ -1,\ -1,\ 0,\ 1)$ – a megoldások fundamentális rendszere, és egyben az L_1 altér bázisa.

Ha most megakarjuk keresni az $L_1 + L_2$ altér dimenzióját és bázisát, meghatározzuk a következő mátrix rangját

$$A = \begin{pmatrix} -17 & 4 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 10 & -1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix},$$

amelynek sorai megfelelően egybeesnek a b_1, b_2 és a_1, a_2 vektorokkal. Amennyiben

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} = -27 \neq 0,$$

akkor $2 \leq r(A) \leq 4$. Kiszámítjuk az alábbi aldeterminánst:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 7 & 2 & -4 \\ 10 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 7 & 6 & -4 \\ 10 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}(-1)\begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} = 67 \neq 0. \qquad (2)$$

Tehát $3 \leq r(A) \leq 4$. Továbbá kiszámítjuk a negyedrendű aldeterminánsokat (beszegési aldeterminánsok), amelyek tartalmazzák a (2)-es aldeterminánst.

$$\begin{vmatrix} -17 & 4 & 9 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 7 & 2 & -4 & 1 \\ 10 & -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -17 & 4 & 9 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 24 & -2 & -13 & 0 \\ -24 & 7 & 18 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 24 & -2 & -13 \\ -24 & 7 & 18 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 24 & 11 & -13 \\ -24 & -11 & 18 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} -17 & 4 & 9 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 7 & 2 & -4 & 1 \\ 10 & -1 & 0 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -17 & 4 & 9 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 7 & 3 & -3 & 0 \\ 10 & -7 & -6 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{2+4}\begin{vmatrix} -17 & 4 & 9 \\ 7 & 3 & -3 \\ 10 & -7 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -17 & 4 & 9 \\ -10 & 7 & 6 \\ 10 & -7 & -6 \end{vmatrix} = 0.$$

Tehát $r(A) = 3$. Ezért az $L_1 + L_2$ altér dimenziója 3, és a b_1, b_2, a_1 vektorok rendszere ezen altér bázisa.

Legyen $c \in L_1 \cap L_2$, akkor egyik oldalról léteznek olyan α_1, α_2 valós számok, hogy

$$c = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = (7\alpha_1 + 10\alpha_2, 2\alpha_1 - \alpha_2, -4\alpha_1, \alpha_1 - 2\alpha_2, \alpha_1 - 6\alpha_2),$$

a másik oldalról pedig a c vektor komponensei kielégítik az (1)-es rendszert. Behelyettesítve a c vektor komponenseit ezen rendszer minden egyenletébe, megkapjuk az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 0, \\ 10\alpha_1 - 10\alpha_2 = 0, \\ 10\alpha_1 - 10\alpha_2 = 0, \\ 11\alpha_1 - 11\alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Innen az következik, hogy $\alpha_1 = \alpha_2$, vagyis $c = \alpha_1(a_1 + a_2)$. Ezért a $c_0 = a_1 + a_2 = (17,1,-4,-1,-5)$ vektor az $L_1 \cap L_2$ metszet bázisa, ahol L_1 és L_2 az $\mathbb{R}^5$ tér lineáris altereri.

Gyakorlatok

Keresse meg az $L_1 + L_2$ összeg dimenzióját és bázisát, valamint az $\mathbb{R}^5$ tér L_1 és L_2 lineáris altereinek $L_1 \cap L_2$ metszetét, ahol L_1 – az alább megadott egyenletrendszer megoldásainak tere, $L_2 = \langle a_1, a_2 \rangle$ – az a_1, a_2 vektorrendszerből előállított lineáris burok!

1.
$$\begin{cases} 7x_1 + 6x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ -5x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 6x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 12x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0; \end{cases} \qquad \begin{array}{l} a_1 = (4,3,1,2,-1), \\ a_2 = (1,7,-2,-1,-10). \end{array}$$

2.
$$\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 - x_5 = 0; \end{cases} \qquad \begin{array}{l} a_1 = (3,4,-7,-3,-3), \\ a_2 = (-4,8,-8,-5,-4). \end{array}$$

3.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + x_4 + 2x_5 = 0; \end{cases} \qquad \begin{array}{l} a_1 = (7,-4,1,2,1), \\ a_2 = (10,0,-6,-1,-2). \end{array}$$

4.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0; \end{cases} \qquad \begin{array}{l} a_1 = (-5,4,1,2,3), \\ a_2 = (1,1,1,1,1). \end{array}$$

5.
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 0; \end{cases} \qquad \begin{array}{l} a_1 = (1,1,1,1,0), \\ a_2 = (2,1,-1,1,1). \end{array}$$

6.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 3x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 3x_5 = 0; \end{cases} \qquad \begin{array}{c} a_1 = (1,1,1,1,1), \\ a_2 = (0,2,3,4,-6). \end{array}$$

7.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 5x_5 = 0; \end{cases} \qquad \begin{array}{c} a_1 = (1,1,1,1,1), \\ a_2 = (0,-7,6,2,2). \end{array}$$

8.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0; \end{cases} \qquad \begin{array}{c} a_1 = (1,1,1,1,1), \\ a_2 = (3,-6,1,7,3). \end{array}$$

9.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 0, \\ 4x_2 + 3x_3 - x_4 + 3x_5 = 0; \end{cases} \qquad \begin{array}{c} a_1 = (1,0,1,0,1), \\ a_2 = (1,3,7,9,-10). \end{array}$$

10.
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_4 + 2x_5 = 0, \\ -x_1 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 11x_4 + 6x_5 = 0; \end{cases} \qquad \begin{array}{c} a_1 = (1,0,1,0,1), \\ a_2 = (-11,6,-6,1,-3). \end{array}$$

20. Lineáris transzformáció

Példafeladat

A $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ leképezés minden $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$ vektort $\varphi(x) = (\chi_1 + \chi_2 + \chi_3,\ 2\chi_1 - \chi_3,\ 3\chi_2 - \chi_1)$ vektorba alakít át (képez). Bizonyítsuk be, hogy a φ lineáris transzformáció lesz! Keressük meg a vektor képének koordinátáinak képletét az $\mathbb{R}^3$ tér e_1, e_2, e_3 kanonikus bázisában; az $a = (1,1,1)$ és e_1, e_2, e_3 vektorok képét és a φ transzformáció mátrixát ugyan ebben a bázisban!

Megoldás. Legyen $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$, $y = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ – az $\mathbb{R}^3$ tér tetszőleges vektorai. Akkor

$$\varphi(x+y) = \varphi[(\chi_1 + \gamma_1, \chi_2 + \gamma_2, \chi_3 + \gamma_3)] =$$

$$= (\chi_1 + \gamma_1 + \chi_2 + \gamma_2 + \chi_3 + \gamma_3, 2(\chi_1 + \gamma_1) - (\chi_3 + \gamma_3), 3(\chi_2 + \gamma_2) - (\chi_1 + \gamma_1)) =$$

$$= (\chi_1 + \chi_2 + \chi_3, 2\chi_1 - \chi_3, 3\chi_2 - \chi_1) + (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3, 2\gamma_1 - \gamma_3, 3\gamma_2 - \gamma_1) = \varphi(x) + \varphi(y),$$

$$\varphi(\lambda x) = \varphi[(\lambda\chi_1, \lambda\chi_2, \lambda\chi_3)] = (\lambda\chi_1 + \lambda\chi_2 + \lambda\chi_3, 2(\lambda\chi_1) - \lambda\chi_3, 3(\lambda\chi_2) - \lambda\chi_1) =$$

$$= \lambda(\chi_1 + \chi_2 + \chi_3, 2\chi_1 - \chi_3, 3\chi_2 - \chi_1) = \lambda\varphi(x),$$

ahol $\lambda \in \mathbb{R}$. Tehát φ – lineáris transzformáció.

Legyen $\varphi(x) = \chi'_1 e_1 + \chi'_2 e_2 + \chi'_3 e_3$, ahol $\chi'_1, \chi'_2, \chi'_3 \in \mathbb{R}$. Amennyiben $\varphi(x) = (\chi_1 + \chi_2 + \chi_3, 2\chi_1 - \chi_3, 3\chi_2 - \chi_1)$ és a tetszőleges vektor koordinátái az e_1, e_2, e_3 kanonikus bázisban megegyeznek a $\varphi(x)$ elemeivel, akkor megkapjuk a vektor képének koordinátáinak képleteit az e_1, e_2, e_3 bázisban

$$\begin{cases} \chi'_1 = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3, \\ \chi'_2 = 2\chi_1 - \chi_3, \\ \chi'_3 = -\chi_1 + 3\chi_2, \end{cases}$$

vagy mátrix alakban

$$\begin{pmatrix} \chi'_1 \\ \chi'_2 \\ \chi'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \end{pmatrix}.$$

Egyértelmű lesz, hogy

$$\varphi(a) = (3,1,2),\ \varphi(e_1) = (1,2,-1),\ \varphi(e_2) = (1,0,3),\ \varphi(e_3) = (1,-1,0).$$

Amennyiben

$\varphi(e_1) = 1 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 - 1 \cdot e_3$, $\varphi(e_2) = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 3 \cdot e_3$, $\varphi(e_3) = 1 \cdot e_1 - 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$,

akkor az alábbi mátrix

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

a φ lineáris transzformáció mátrixa lesz az e_1, e_2, e_3 bázisban.

Gyakorlatok

A $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ leképezés minden $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$ vektort $\varphi(x) \in \mathbb{R}^3$ vektorba alakít át (képez). Bizonyítsa be, hogy a φ lineáris transzformáció lesz! Keresse meg a vektor képének koordinátáinak képletét az $\mathbb{R}^3$ tér e_1, e_2, e_3 kanonikus bázisában; az $a = (1,1,1)$ és e_1, e_2, e_3 vektorok képét és a φ transzformáció mátrixát ugyan ebben a bázisban!

1. $\varphi(x) = (3\chi_1 - \chi_2, \chi_1 + 2\chi_2 - \chi_3, \chi_3 - \chi_2)$.

2. $\varphi(x) = (2\chi_1 - \chi_2 - \chi_3, \chi_1 - 2\chi_2 + \chi_3, \chi_1 + \chi_2 - 2\chi_3)$.

3. $\varphi(x) = (\chi_1 - \chi_2 - \chi_3, -\chi_1 + \chi_2 - \chi_3, -\chi_1 - \chi_2 + \chi_3)$.

4. $\varphi(x) = (\chi_1 - \chi_2, \chi_2 - \chi_3, \chi_1 - \chi_3)$.

5. $\varphi(x) = (\chi_2 + 3\chi_3, 2\chi_2 - \chi_3, \chi_2 + \chi_3)$.

6. $\varphi(x) = (2\chi_1 - \chi_3, 2\chi_2 - \chi_3, \chi_1 - \chi_3)$.

7. $\varphi(x) = (\chi_1 - \chi_2 + 2\chi_3, \chi_1 - \chi_2, \chi_1 + 2\chi_2)$.

8. $\varphi(x) = (\chi_1 + 2\chi_2 - \chi_3, 2\chi_1 - \chi_2 + \chi_3, \chi_1 + 2\chi_2 - \chi_3)$.

9. $\varphi(x) = (\chi_2 + 4\chi_3, \chi_1 + \chi_2 - 2\chi_3, 2\chi_2 - 2\chi_3)$.

10. $\varphi(x) = (2\chi_1 + \chi_2 + 2\chi_3, \chi_1 - \chi_3, \chi_2 + \chi_3)$.

21. Lineáris transzformáció mátrixa egy bázisban

Példafeladat

Határozzuk meg az $\mathbb{R}^3$ vektortér azon φ lineáris transzformációját, amely az $a_1 = (1,1,1)$, $a_2 = (1,0,0)$, $a_3 = (2,2,1)$ bázis vektorokat megfelelően ezen tér $b_1 = (0,0,0)$, $b_2 = (1,0,0)$, $b_3 = (1,1,0)$ vektoraiba alakítja át! Keressük meg a φ transzformáció mátrixát az a_1, a_2, a_3 bázisban!

Megoldás. Legyen $a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$ – az $\mathbb{R}^3$ vektortér tetszőleges vektora. Megvizsgáljuk a $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ leképezést, amely minden $a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$ vektornak megfeleltet egy $\varphi(a) = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3$ vektort. Bebizonyítjuk a leképezés lineárisságát. Legyen $b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \beta_3 a_3$ – úgyszintén az $\mathbb{R}^3$ vektortér tetszőleges vektora. Akkor

$$\varphi(a+b) = \varphi[(\alpha_1+\beta_1)a_1 + (\alpha_2+\beta_2)a_2 + (\alpha_3+\beta_3)a_3] =$$

$$= (\alpha_1+\beta_1)b_1 + (\alpha_2+\beta_2)b_2 + (\alpha_3+\beta_3)b_3 =$$

$$= (\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3) + (\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \beta_3 b_3) = \varphi(a) + \varphi(b),$$

$$\varphi(\lambda a) = \varphi[(\lambda\alpha_1)a_1 + (\lambda\alpha_2)a_2 + (\lambda\alpha_3)a_3] = (\lambda\alpha_1)b_1 + (\lambda\alpha_2)b_2 + (\lambda\alpha_3)b_3 =$$

$$= \lambda(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3) = \lambda\varphi(a) \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Tehát φ – lineáris transzformáció. Nyilvánvaló, hogy $\varphi(a_1) = b_1$, $\varphi(a_2) = b_2$, $\varphi(a_3) = b_3$.

Megkeressük a φ transzformáció mátrixát az a_1, a_2, a_3 bázisban. Ehhez kiszámítjuk a bázisvektorok képeinek koordinátáit ebben a bázisban. Legyen

$$\begin{aligned} \varphi(a_1) = b_1 &= \tau_{11}a_1 + \tau_{21}a_2 + \tau_{31}a_3, \\ \varphi(a_2) = b_2 &= \tau_{12}a_1 + \tau_{22}a_2 + \tau_{32}a_3, \\ \varphi(a_3) = b_3 &= \tau_{13}a_1 + \tau_{23}a_2 + \tau_{33}a_3. \end{aligned} \qquad (1)$$

Az a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 vektorok komponenseiből felépítve egy mátrixot, és ezen mátrix sorai fölött elvégezve az elemi átalakításokat megkapjuk a τ_{ij} $(i, j = 1,2,3)$ koordináták értékeit, amelyek kielégítik az (1)-es egyenlőségeket.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Tehát

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

– a φ transzformáció mátrixa az a_1, a_2, a_3 bázisban.

Gyakorlatok

Határozza meg az $\mathbb{R}^3$ vektortér azon φ lineáris transzformációját, amely az a_1, a_2, a_3 bázis vektorokat megfelelően ezen tér b_1, b_2, b_3 vektoraiba alakítja át! Keresse meg a φ transzformáció mátrixát az a_1, a_2, a_3 bázisban!

1. $a_1 = (1,3,-2)$, $a_2 = (4,-2,1)$, $a_3 = (-4,-1,1)$;
$b_1 = (-4,-1,1)$, $b_2 = (7,-1,0)$, $b_3 = (0,-1,0)$.

2. $a_1 = (1,-1,1)$, $a_2 = (1,0,1)$, $a_3 = (2,-1,1)$;
$b_1 = (1,1,1)$, $b_2 = (1,1,1)$, $b_3 = (1,1,0)$.

3. $a_1 = (1,-1,1)$, $a_2 = (2,1,-1)$, $a_3 = (3,0,1)$;
$b_1 = (-1,1,1)$, $b_2 = (0,-1,1)$, $b_3 = (-1,0,2)$.

4. $a_1 = (1,-1,1)$, $a_2 = (2,-1,0)$, $a_3 = (3,-2,0)$;
$b_1 = (-1,0,1)$, $b_2 = (0,0,0)$, $b_3 = (0,1,1)$.

5. $a_1 = (1,-1,-1)$, $a_2 = (-1,2,0)$, $a_3 = (0,\ 1,\ 0)$;
$b_1 = (1,-1,1)$, $b_2 = (1,0,-1)$, $b_3 = (2,-1,0)$.

6. $a_1 = (1,0,1)$, $a_2 = (1,-1,2)$, $a_3 = (2,-1,4)$;
$b_1 = (0,-1,1)$, $b_2 = (1,1,0)$, $b_3 = (1,0,1)$.

7. $a_1 = (1,1,1)$, $a_2 = (0,-1,2)$, $a_3 = (1,0,2)$;

$b_1 = (1,-2,1)$, $b_2 = (-1,2,-1)$, $b_3 = (1,0,1)$.

8. $a_1 = (2,3,5)$, $a_2 = (0,1,2)$, $a_3 = (1,0,0)$;

$b_1 = (1,1,1)$, $b_2 = (1,1,-1)$, $b_3 = (2,1,2)$.

9. $a_1 = (2,0,3)$, $a_2 = (4,1,5)$, $a_3 = (3,1,2)$;

$b_1 = (1,2,-1)$, $b_2 = (4,5,-2)$, $b_3 = (1,-1,1)$.

10. $a_1 = (1,1,1)$, $a_2 = (1,1,-1)$, $a_3 = (2,1,2)$;

$b_1 = (1,1,1)$, $b_2 = (1,1,1)$, $b_3 = (1,1,0)$.

22. Műveletek lineáris transzformációkkal

Példafeladat

Legyen φ lineáris transzformációja az $\mathbb{R}^3$ vektortérnek, amely az $x=(\chi_1,\chi_2,\chi_3)$ vektort a $\varphi(x)=(\chi_1-\chi_2,\chi_2-\chi_3,\chi_3-\chi_1)$ vektorba alakítja át,

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

– a ψ lineáris transzformáció mátrixa ugyan ezen tér $a_1=(1,-1,1)$, $a_2=(2,-1,1)$, $a_3=(3,-2,3)$ bázisában. Keressük meg az $\mathbb{R}^3$ tér kanonikus bázisában a φ, ψ, $\varphi+\psi$, $\varphi-\psi$, $\varphi\psi$, $\psi\varphi$ lineáris transzformációk mátrixait!

Megoldás. Amennyiben

$$\varphi(e_1)=(1,0,-1)= \;\; 1\cdot e_1+0\cdot e_2-1\cdot e_3,$$

$$\varphi(e_2)=(-1,1,0)=-1\cdot e_1+1\cdot e_2+0\cdot e_3,$$

$$\varphi(e_3)=(0,-1,1)= \;\; 0\cdot e_1-1\cdot e_2+1\cdot e_3,$$

akkor

$$A_\varphi=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

– a φ transzformáció mátrixa a kanonikus bázisban.

Megkeressük az átmeneti mátrixot az a_1, a_2, a_3 bázisból az e_1, e_2, e_3 kanonikus bázisba. Világos, hogy

$$T^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & -1 & -2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

– az átmeneti mátrix az e_1, e_2, e_3 bázisból az a_1, a_2, a_3 bázisba. Kiszámítjuk a T mátrixot, amely a T^{-1} mátrix inverze.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Innen

$$T = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A ψ transzformáció A_ψ mátrixa a kanonikus bázisban egyenlő lesz

$$A_\psi = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -3 & -31 & -14 \\ 2 & 19 & 8 \\ -4 & -26 & -10 \end{pmatrix}.$$

Ezután megkeressük a $\varphi + \psi$, $\varphi - \psi$, $\varphi\psi, \psi\varphi$ transzformációknak megfelelő $A_{\varphi+\psi}$, $A_{\varphi-\psi}$, $A_{\varphi\psi}$, $A_{\psi\varphi}$ mátrixokat az e_1, e_2, e_3 bázisban

$$A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi = \begin{pmatrix} -2 & -32 & -14 \\ 2 & 20 & 7 \\ -5 & -26 & -9 \end{pmatrix}, \quad A_{\varphi-\psi} = A_\varphi - A_\psi = \begin{pmatrix} 4 & 30 & 14 \\ -2 & -18 & -9 \\ 3 & 26 & 11 \end{pmatrix},$$

$$A_{\varphi\psi} = A_\varphi A_\psi = \begin{pmatrix} -5 & -50 & -22 \\ 6 & 45 & 18 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_{\psi\varphi} = A_\psi A_\varphi = \begin{pmatrix} 11 & -28 & 17 \\ -6 & 17 & -11 \\ 6 & -22 & 16 \end{pmatrix}.$$

Gyakorlatok

Legyen φ lineáris transzformációja az $\mathbb{R}^3$ vektortérnek, amely az $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$ vektort a $\varphi(x)$ vektorba alakítja át,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

– a ψ lineáris transzformáció mátrixa ugyan ezen tér a_1, a_2, a_3 bázisában. Keresse meg az $\mathbb{R}^3$ tér kanonikus bázisában a φ, ψ, $\varphi+\psi$, $\varphi-\psi$, $\varphi\psi$, $\psi\varphi$ lineáris transzformációk mátrixait!

1. $\varphi(x)=(2\chi_2-3\chi_3,\chi_1+2\chi_2+3\chi_3,\chi_3-\chi_1)$;

$a_1=(1,1,2)$, $a_2=(1,1,1)$, $a_3=(1,-1,2)$.

2. $\varphi(x)=(2\chi_1-\chi_2,2\chi_2-\chi_3,\chi_1+\chi_2+\chi_3)$;

$a_1=(1,1,1)$, $a_2=(2,1,1)$, $a_3=(3,2,3)$.

3. $\varphi(x)=(\chi_1+\chi_2+\chi_3,2\chi_1-\chi_3,3\chi_2-\chi_1)$;

$a_1=(1,-1,1)$, $a_2=(-1,2,0)$, $a_3=(0,1,2)$.

4. $\varphi(x)=(2\chi_1-\chi_2-\chi_3,\chi_1+\chi_3,\chi_1+\chi_2-2\chi_3)$;

$a_1=(1,1,-1)$, $a_2=(-1,2,0)$, $a_3=(0,1,0)$.

5. $\varphi(x)=(\chi_1-\chi_2+2\chi_3,\chi_1-\chi_2,\chi_1+2\chi_2)$;

$a_1=(1,-1,1)$, $a_2=(2,-1,-1)$, $a_3=(3,-2,1)$.

6. $\varphi(x)=(\chi_1-\chi_2-\chi_3,-\chi_1+\chi_2-\chi_3,-\chi_1-\chi_2+\chi_3)$;

$a_1=(2,1,1)$, $a_2=(1,1,3)$, $a_3=(3,2,3)$.

7. $\varphi(x)=(\chi_1-\chi_2,\chi_1+\chi_2+\chi_3,\chi_1+2\chi_2-\chi_3)$;

$a_1=(-1,1,-1)$, $a_2=(1,0,2)$, $a_3=(0,1,2)$.

8. $\varphi(x)=(\chi_2+2\chi_3,2\chi_3-\chi_1,3\chi_1-\chi_2)$;

$a_1=(1,2,1)$, $a_2=(0,1,1)$, $a_3=(1,1,1)$.

9. $\varphi(x)=(\chi_1+4\chi_2+\chi_3,2\chi_1-3\chi_3,\chi_2-3\chi_1)$;

$a_1=(3,1,1)$, $a_2=(1,2,-1)$, $a_3=(2,0,1)$.

10. $\varphi(x)=(2\chi_2-2\chi_3,2\chi_1-2\chi_3,-\chi_2-\chi_1)$;

$a_1=(0,1,-1)$, $a_2=(1,2,-1)$, $a_3=(1,1,-1)$.

23. Lineáris transzformáció nulltere és képtere

Példafeladat

Legyen

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

– az $\mathbb{R}^4$ vektortér φ lineáris transzformációjának mátrixa a c_1, c_2, c_3, c_4 bázisban. Határozzuk meg az $\mathrm{Im}\varphi$ és a $\mathrm{Ker}\varphi$ alterek bázisát és dimenzióját! Győződjünk meg arról, hogy $\dim \mathrm{Im}\varphi + \dim \mathrm{Ker}\varphi = \dim \mathbb{R}^4$!

Megoldás. Előbb a φ lineáris transzformáció $\mathrm{Im}\varphi$ képterének dimenzióját és bázisát keressük meg. Ehhez kiszámítjuk az A mátrix rangját.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad 2 \le r(A) \le 4;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 5 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 5 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 5 \\ 2 & -3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 5 \\ 2 & -3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Tehát $r(A) = 2$. Ezért $\dim \mathrm{Im}\varphi = 2$ és a $\varphi(c_1)$, $\varphi(c_2)$ vektorrendszer az $\mathrm{Im}\varphi$ képtér bázisa.

Most a $\mathrm{Ker}\varphi$ nulltér bázisát keressük meg. Legyen $x = \chi_1 c_1 + \chi_2 c_2 + \chi_3 c_3 + \chi_4 c_4$ – a φ lineáris transzformáció $\mathrm{Ker}\varphi$ magjának tetszőleges eleme. Akkor ezen vektor χ_1, χ_2, χ_3, χ_4 koordinátáira igaz az alábbi egyenlőség

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \\ \chi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Megoldjuk az (1)-es lineáris homogén egyenletrendszert a χ_1, χ_2, χ_3, χ_4 változókra. Amennyiben

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

– az A maximális rendű mátrixának aldeterminánsa nem egyenlő nullával (rangot meghatározó aldeterminánsa), akkor az (1)-es egyenletrendszer ekvivalens a következő egyenletrendszerrel:

$$\begin{cases} \chi_1 + 2\chi_2 = -3\chi_3 - 4\chi_4, \\ -2\chi_1 + \chi_2 = \chi_3 + 3\chi_4. \end{cases}$$

Innen

$$\begin{cases} \chi_1 = -\chi_3 - 2\chi_4, \\ \chi_2 = -\chi_3 - \chi_4. \end{cases}$$

Tehát a $\mathrm{K}er\varphi$ bázisát az $u_1 = -c_1 - c_2 + c_3$, $u_2 = -2c_1 - c_2 + c_4$ elemek alkotják. Ezért $\dim \mathrm{K}er\varphi = 2$ és az u_1, u_2 vektorrendszer a $\mathrm{K}er\varphi$ nullltér bázisa.

Gyakorlatok

Legyen A – az $\mathbb{R}^4$ vektortér φ lineáris transzformációjának mátrixa a c_1, c_2, c_3, c_4 bázisban. Határozza meg az $\mathrm{Im}\varphi$ és a $\mathrm{K}er\varphi$ alterek bázisát és dimenzióját! Győződjön meg arról, hogy $\dim \mathrm{Im}\varphi + \dim \mathrm{K}er\varphi = \dim \mathbb{R}^4$!

1. $A = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

7. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

8. $A=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & -1 & -5 \\ -1 & -2 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

9. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

10. $A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -2 & -4 \\ 4 & -3 & 2 & -4 \\ 5 & -2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$.

24. Lineáris transzformáció sajátvektora és sajátértéke

Példafeladat

Legyen

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

– az $\mathbb{R}^4$ vektortér φ lineáris transzformáció mátrixa a kanonikus bázisban. Keressük meg a φ^2, φ^3, φ^4 lineáris transzformációk mátrixait ebben a bázisban és győződjünk meg arról, hogy $f(\varphi)=0$, ahol f – a φ transzformáció karakterisztikus polinomja! Határozzuk meg a φ transzformáció összes sajátértékét és összes sajátvektorát!

Megoldás. Legyenek A_{φ^2}, A_{φ^3}, A_{φ^4} – megfelelően a φ^2, φ^3, φ^4 transzformációk mátrixai a kanonikus bázisban. Akkor

$$A_{\varphi^2}=A^2=4\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad A_{\varphi^3}=A_{\varphi^2}A=4\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix},$$

$$A_{\varphi^4}=A_{\varphi^3}A=16\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Megkeressük a φ transzformáció $f(\lambda)$ karakterisztikus polinomját

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1-\lambda & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 2-\lambda & 2-\lambda & 1-(1-\lambda)^2\\ 0 & 2-\lambda & 0 & -2+\lambda\\ 0 & 0 & 2-\lambda & -2+\lambda\\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=-(2-\lambda)^3\begin{vmatrix}1 & 1 & \lambda\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=(\lambda-2)^3(\lambda+2).$$

Kiszámoljuk $f(A)$-t

$$(A-2E)^3=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & -1\end{pmatrix}^3=16\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & -1\end{pmatrix};$$

$$(A+2E)=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 3 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 3\end{pmatrix};$$

$$f(A)=(A-2E)^3(A+2E)=0.$$

Innen, valamint a transzformációk fölötti és azok mátrixai fölötti műveletek közötti kapcsolatából következik, hogy $f(\varphi)=0$.

Nyilvánvaló hogy, $\lambda_1=2$, $\lambda_2=-2$ – a φ transzformáció sajátértékei. Megkeressük a sajátvektorokat, amelyek ezekhez a sajátértékekhez tartoznak. Előbb a $\lambda_1=2$ esetet vizsgáljuk. Megoldjuk az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{cases}(1-2)x_1+ & x_2+ & x_3+ & x_4=0,\\ x_1+(1-2)x_2- & & x_3- & x_4=0,\\ x_1- & x_2+(1-2)x_3- & & x_4=0,\\ x_1- & x_2- & x_3+(1-2)x_4=0,\end{cases} \qquad (1)$$

Könnyen észrevehető, hogy az (1)-es rendszer ekvivalens a következő egyenlettel:

$$-x_1+x_2+x_3+x_4=0.$$

Ezért az $u_1=(1,1,0,0)$, $u_2=(1,0,1,0)$, $u_3=(1,0,0,1)$ vektorok az (1)-es rendszer megoldásainak fundamentális rendszerét alkotják. Tehát, ezen rendszer bármely nem nulla x megoldását fel lehet írni a következőképpen:

$$x=\gamma_1u_1+\gamma_2u_2+\gamma_3u_3, \qquad (2)$$

ahol γ_1, γ_2, γ_3 – valamilyen valós számok, amelyek egyszerre nem egyenlők nullával. Így a φ transzformáció sajátvektorai, amelyek a $\lambda_1=2$ sajátértékhez tartoznak, a (2)-es alakban megadott vektorral fejeződnek ki.

Most megkeressük a φ transzformáció sajátvektorait, amelyek a $\lambda_2=-2$ sajátértéknek tartoznak meg. Ehhez megoldjuk a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Elvégezzük a következő átalakításokat (3)-as rendszer mátrixának sorain

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 & -8 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Innen az következik, hogy $v = (-1,1,1,1)$ – a (3)-as rendszer megoldásainak fundamentális rendszere. Így a (3)-as rendszer bármilyen nem nulla megoldása felírható a következőképpen:

$$x = \gamma(-1,1,1,1) \ (\gamma \in \mathbb{R}, \gamma \neq 0).$$

Gyakorlatok

Legyen A – az $\mathbb{R}^4$ vektortér φ lineáris transzformáció mátrixa a kanonikus bázisban. Keresse meg a φ^2, φ^3, φ^4 lineáris transzformációk mátrixait ebben a bázisban és győződjön meg arról, hogy $f(\varphi) = 0$, ahol f – a φ transzformáció karakterisztikus polinomja! Határozza meg a φ transzformáció összes sajátértékét és összes sajátvektorát!

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \\ -3 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

6. $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

7. $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 7 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

9. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

10. $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

25. Lineáris transzformáció sajátvektoraiból álló bázisok

Példafeladat

Legyenek

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \\ -9 & -3 & 7 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

– megfelelően a φ_1, φ_2, φ_3 lineáris transzformációk mátrixai az $\mathbb{R}^3$ vektortér kanonikus bázisában. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbb{R}^3$ térnek van két bázisa, melyek mindegyike a φ_1 és φ_2 transzformációknak megfelelő sajátvektorokból állnak! Keressük meg ezeket a bázisokat és a transzformációknak megfelelő mátrixokat ezekben a bázisokban! Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbb{R}^3$ térben nincs olyan bázis, amely a φ_3 transzformáció sajátvektoraiból áll!

Megoldás. Megkeressük a φ_1 transzformáció karakterisztikus polinomját

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 & 2 \\ -4 & 1-\lambda & 2 \\ -9 & -3 & 7-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \lambda^2+\lambda-6 & 1-\lambda & 4-2\lambda \\ -3+3\lambda & -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (\lambda-2)(\lambda+3) & -2(\lambda-2) \\ 3(\lambda-1) & -(\lambda-1) \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda+3 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda-2)(\lambda-1)(-\lambda+3).$$

Innen megkapjuk a φ_1 transzformáció sajátértékeit:

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 2, \qquad \lambda_3 = 3.$$

Megkeressük a φ_1 transzformáció sajátvektorait, amelyek a $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartoznak. Ehhez megoldjuk az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ -4x_1 + 2x_3 = 0, \\ -9x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$$

Elvégezzük az elemi átalakításokat ezen rendszer mátrixának sorain

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 2 \\ -9 & -3 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tehát, a φ_1 transzformáció tetszőleges sajátvektora, amely a λ_1 sajátértékhez tartozik, a következő alakú: αf_1, ahol $f_1 = (1,1,2)$, $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$.

Hasonlóan meglehet mutatni, hogy αf_2 és αf_3 a φ_1 transzformáció sajátvektorai, amelyek megfelelően a $\lambda_2 = 2$ és a $\lambda_3 = 3$ sajátértékekhez tartoznak, ahol $f_2 = (1,2,3)$, $f_3 = (1,1,3)$, $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$.

A φ_2 transzformáció karakterisztikus polinomja a $-(\lambda-1)^2(\lambda-2)$ polinom lesz, a $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ sajátértékeknek megfelelően. Hasonlóan az előző esetekhez kiszámítjuk a φ_2 transzformáció sajátvektorait. Eredményként azt kapjuk, hogy $h_1 = (-1,1,0)$, $h_2 = (1,0,1)$ – a φ_2 transzformáció sajátvektorai, amelyek a λ_1 sajátértékhez taroznak; $h_3 = (1,1,3)$ – sajátvektor, amely a λ_2 sajátértékhez tartozik.

Az f_1, f_2, f_3 vektorrendszer az $\mathbb{R}^3$ tér bázisa, amennyiben olyan lineáris transzformáció sajátvektoraiból áll, amelyek különböző sajátértékekhez tartoznak. A h_1, h_2, h_3 vektorok rendszere úgyszintén az $\mathbb{R}^3$ tér bázisa, mivel h_1, h_2 sajátvektorok és h_3 sajátvektor különböző sajátértékekhez tartoznak és a h_1, h_2 sajátvektorok rendszere lineárisan független.

Tovább, amennyiben

$$\begin{aligned} &\varphi_1(f_1) = 1\cdot f_1 + 0\cdot f_2 + 0\cdot f_3, && \varphi_2(h_1) = 1\cdot h_1 + 0\cdot h_2 + 0\cdot h_3, \\ &\varphi_1(f_2) = 0\cdot f_1 + 2\cdot f_2 + 0\cdot f_3, && \varphi_2(h_2) = 0\cdot h_1 + 1\cdot h_2 + 0\cdot h_3, \\ &\varphi_1(f_3) = 0\cdot f_1 + 0\cdot f_2 + 3\cdot f_3; && \varphi_2(h_3) = 0\cdot h_1 + 0\cdot h_2 + 2\cdot h_3, \end{aligned}$$

akkor

$$A_{\varphi_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A_{\varphi_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

– megfelelően az f_1, f_2, f_3 bázis φ_1 transzformációnak és a h_1, h_2, h_3 bázis φ_2 transzformációnak mátrixai.

A φ_3 transzformáció karakterisztikus polinomja a $-\lambda(\lambda-1)^2$ polinom lesz. Ezért $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$ – a φ_3 transzformáció sajátértékei. A φ_3 transzformáció összes sajátvektora, amelyek a $\lambda_1=0$ sajátértékhez tartoznak a következőképpen néznek ki:

$$\kappa(1,\,1,\,3)\quad(\kappa\neq 0)\,. \tag{1}$$

A sajátvektorok, amelyek a $\lambda_2=1$ sajátértékhez tartoznak, a következő alakot veszik fel:

$$\kappa(1,1,2)\qquad(\kappa\neq 0)\,. \tag{2}$$

Az (1)-es vagy (2)-es alaknak megfelelő bármilyen három vektor lineárisan összefüggő rendszert alkot, mivel ebben a rendszerben mindig lehet találni két arányos vektort. Tehát, az $\mathbb{R}^3$ térben nem létezik olyan bázis, amely a φ_3 transzformáció sajátvektoraiból állna.

Gyakorlatok

Legyenek A_1, A_2, A_3 – megfelelően a φ_1, φ_2, φ_3 lineáris transzformációk mátrixai az $\mathbb{R}^3$ vektortér kanonikus bázisában. Bizonyítsa be, hogy az R^3 térnek van két bázisa, melyek mindegyike a φ_1 és φ_2 transzformációknak megfelelő sajátvektorokból állnak! Keresse meg ezeket a bázisokat és a transzformációknak megfelelő mátrixokat ezekben a bázisokban! Bizonyítsa be, hogy az $\mathbb{R}^3$ térben nincs olyan bázis, amely a φ_3 transzformáció sajátvektoraiból áll!

1. $A_1=\begin{pmatrix}-6 & 5 & -5\\ -1 & 4 & -1\\ 9 & -5 & 8\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}-3 & 2 & -2\\ -2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix}4 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ -6 & -6 & -4\end{pmatrix}$.

2. $A_1=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & -6 & 5\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -2 & 3 & 0\\ -3 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & -5 & 3\end{pmatrix}$.

3. $A_1=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ -5 & 4 & 1\\ -9 & 3 & 4\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}4 & 0 & -1\\ 3 & 1 & -1\\ 6 & 0 & -1\end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 1\\ -2 & -1 & 1\\ -5 & -1 & 2\end{pmatrix}$.

4. $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & 6 & -1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. $A_1 = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 \\ 5 & 0 & -1 \\ 9 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -5 & -1 & 3 \\ -9 & -3 & 6 \end{pmatrix}$.

6. $A_1 = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & -2 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

7. $A_1 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 0 & -5 & 2 \\ -3 & -9 & 5 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 9 & -1 & -3 \\ 9 & 0 & -7 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 4 & 8 & -4 \end{pmatrix}$.

8. $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

9. $A_1 = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

10. $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -7 & 8 & 2 \\ -6 & 7 & 2 \\ 6 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -8 & -2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

26. Lineáris altér ortogonális komplementere

Példafeladat

Az $\mathbb{R}^4$ euklideszi tér L altere az

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0, \end{cases} \tag{1}$$

egyenletrendszer megoldásainak a tere. Keressük meg az L altér $L^{\perp}$ ortogonális komplementerét az $\mathbb{R}^4$ térben és a $c = (-24, 20, 5, -1)$ vektor vetületét az L altérre és az ő $L^{\perp}$ ortogonális komplementerére!

Megoldás. Az L homogén egyenletrendszer megoldásainak terének $L^{\perp}$ ortogonális komplementere megegyezik azzal a burokkal, amely ezen rendszer mátrixának soraira van felépítve. Előbb megtaláljuk az (1)-es rendszer mátrixának rangját

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Amennyiben

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

akkor $r(A) = 2$ és az $a_1 = (1, 2, -1, 1)$, $a_2 = (2, 3, 4, -1)$ vektorrendszer az $L^{\perp}$ tér bázisa.

Legyen b_1, b_2 az L tér bázisa, vagyis az (1)-es rendszer megoldásainak fundamentális rendszere. Akkor a_1, a_2, b_1, b_2 – az $\mathbb{R}^4$ tér bázisa és

$$c = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 \tag{2}$$

ahol α_1, α_2, β_1, $\beta_2 \in R$.

Legyen c', c'' – a c vektor vetületei megfelelően az L, $L^{\perp}$ altereken. Akkor $c = c' + c''$ és $c' = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2$, $c'' = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Előbb kiszámítjuk az α_1, α_2 együtthatókat. Ehhez skalárisan megszorozzuk a (2)-es egyenletet az a_1, a_2 vektorokra. Megkapjuk a következő egyenletrendszert

$$\begin{cases}(a_1,c)=\alpha_1(a_1,a_1)+\alpha_2(a_1,a_2),\\(a_2,c)=\alpha_1(a_2,a_1)+\alpha_2(a_2,a_2);\end{cases}\Rightarrow\quad\begin{cases}10=7\alpha_1+3\alpha_2,\\33=3\alpha_1+30\alpha_2.\end{cases}$$

Innen $\alpha_1=\alpha_2=1$. Tehát $c'=a_1+a_2=(3,5,3,0)$ és $c''=c-c'=(-27,15,2,-1)$.

Gyakorlatok

Az $\mathbb{R}^4$ euklideszi tér L altere az alább megadott egyenletrendszer megoldásainak a tere. Keresse meg az L altér $L^\perp$ ortogonális komplementerét az $\mathbb{R}^4$ térben és a c vektor vetületét az L altérre és az ő $L^\perp$ ortogonális komplementerére!

1. $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3+x_4=0,\\2x_1+3x_2+4x_3-x_4=0,\\x_1+x_2+5x_3-2x_4=0;\end{cases}$ $c=(-5,4,6,-1).$

2. $\begin{cases}3x_1+x_2+x_4=0,\\5x_1+2x_2+3x_3-x_4=0,\\2x_1+x_2+3x_3-2x_4=0;\end{cases}$ $c=(2,0,4,-1).$

3. $\begin{cases}x_1+3x_3+3x_4=0,\\3x_1+x_2+x_4=0,\\5x_1+2x_2-3x_3-x_4=0;\end{cases}$ $c=(5,1,-4,0).$

4. $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3-x_4=0,\\3x_1+x_2-x_3+2x_4=0,\\x_1-x_2-5x_3+4x_4=0;\end{cases}$ $c=(1,-2,-4,5).$

5. $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+x_4=0,\\x_1+4x_2+x_4=0,\\-x_1-6x_3-x_4=0;\end{cases}$ $c=(-14,-3,5,0).$

6. $\begin{cases}2x_1+6x_2+3x_3+2x_4=0,\\x_1+2x_2+3x_3+x_4=0,\\3x_1+8x_2+6x_3+3x_4=0;\end{cases}$ $c=(2,8,6,4).$

7. $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3+x_4=0,\\x_1+x_2+2x_3-x_4=0,\\3x_1+4x_2+3x_3-x_4=0;\end{cases}$ $c=(6,2,3,0).$

8. $\begin{cases}2x_1-x_2+4x_3+3x_4=0,\\x_1-x_2-2x_3+x_4=0,\\x_1+x_2+14x_3+3x_4=0;\end{cases}$ $c=(-5,-11,3,5).$

9. $\begin{cases}x_1+3x_2-4x_3+2x_4=0,\\4x_1+x_2-x_4=0,\\-10x_1+3x_2-8x_3+7x_4=0;\end{cases}$ $c=(-15,29,3,-5).$

10. $\begin{cases}2x_1+3x_2+x_3-x_4=0,\\-2x_1+3x_3+x_4=0,\\6x_1+3x_2-5x_3-3x_4=0;\end{cases}$ $c=(14,-5,1,-5).$

27. Gram-Schmidt-féle ortonormalizációs eljárás

Példafeladatok

1. Az $\mathbb{R}^4$ euklideszi térben ortonormalizáljuk az alábbi vektorrendszert:

$$a_1 = (1,2,3,4)\,, \qquad a_2 = (0,5,0,5)\,, \qquad a_3 = (8,10,-8,14)\,!$$

Megoldás. Mint ismeretes, az ortogonalizáció eljárás csak a lineárisan független vektorrendszereknél használható. Ezért előbb kiszámoljuk az alábbi mátrix rangját:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 8 & 10 & -8 & 14 \end{pmatrix}.$$

Könnyen kiszámítható, hogy az $r(A) = 3$ és az a_1, a_2, a_3 vektorok lineárisan független rendszert alkotnak.

A keresett ortogonális vektorrendszer első c_1 vektorának értékéül az a_1 vektort vesszük

$$c_1 = a_1 = (1,2,3,4)\,.$$

Ezután a c_2 vektort keressük a c_1 és a_2 vektorok lineáris kombinációjaként

$$c_2 = \lambda_1^{(2)} c_1 + a_2\,.$$

Ahhoz, hogy a c_2 vektor ortogonális legyen a c_1 vektorhoz, teljesülnie kell az alábbi feltételnek:

$$(c_1, c_2) = (c_1, \lambda_1^{(2)} c_1 + a_2) = \lambda_1^{(2)} (c_1, c_1) + (c_1, a_2) = 0\,.$$

Innen

$$\lambda_1^{(2)} = -\frac{(c_1, a_2)}{(c_1, c_1)} = -\frac{1\cdot 0 + 2\cdot 5 + 3\cdot 0 + 4\cdot 5}{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2} = -\frac{30}{30} = -1\,.$$

Tehát, $c_2 = -c_1 + a_2 = (-1,3,-3,1)$.

A c_3 vektort keressük a c_1, c_2 és az a_3 vektorok lineáris kombinációjaként

$$c_3 = \lambda_1^{(3)} c_1 + \lambda_2^{(3)} c_2 + a_3\,.$$

Ahhoz, hogy a c_3 vektor ortogonális legyen a c_1, c_2 vektorokhoz, teljesülniük kell az alábbi feltételeknek:

$$(c_1, c_3) = (c_1, \lambda_1^{(3)} c_1 + \lambda_2^{(3)} c_2 + a_3) = \lambda_1^{(3)} (c_1, c_1) + \lambda_2^{(3)} (c_1, c_2) + (c_1, a_3) = 0,$$

$$(c_2, c_3) = (c_2, \lambda_1^{(3)} c_1 + \lambda_2^{(3)} c_2 + a_3) = \lambda_1^{(3)} (c_2, c_1) + \lambda_2^{(3)} (c_2, c_2) + (c_2, a_3) = 0.$$

Innen

$$\lambda_1^{(3)} = -\frac{(c_1, a_3)}{(c_1, c_1)} = -\frac{1 \cdot 8 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot (-8) + 4 \cdot 14}{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2} = -\frac{60}{30} = -2,$$

$$\lambda_2^{(3)} = -\frac{(c_2, a_3)}{(c_2, c_2)} = -\frac{-1 \cdot 8 + 3 \cdot 10 + (-3) \cdot (-8) + 1 \cdot 14}{(-1)^2 + 3^2 + (-3)^2 + 1^2} = -\frac{60}{20} = -3.$$

Így

$$c_3 = -2c_1 - 3c_2 + a_3 = (9, -3, -5, 3).$$

Felépítettünk egy új párosával ortogonális nem nulla vektorokból álló rendszert

$$c_1 = (1, 2, 3, 4),$$

$$c_2 = (-1, 3, -3, 1),$$

$$c_3 = (9, -3, -5, 3).$$

Ahhoz, hogy a kapott rendszerből ortonormalizált rendszert kapjunk, a c_1, c_2, c_3 vektorokat elosztjuk saját normájukra.

$$\|c_1\| = \sqrt{(c_1, c_1)} = \sqrt{30}, \qquad \|c_2\| = 2\sqrt{5}, \qquad \|c_3\| = 2\sqrt{31}.$$

Akkor

$$b_1 = \frac{c_1}{\|c_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{3}{\sqrt{30}}, \frac{4}{\sqrt{30}} \right),$$

$$b_2 = \frac{c_2}{\|c_2\|} = \left(-\frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{3}{2\sqrt{5}}, -\frac{3}{2\sqrt{5}}, \frac{1}{2\sqrt{5}} \right),$$

$$b_3 = \frac{c_3}{\|c_3\|} = \left(\frac{9}{2\sqrt{31}}, -\frac{3}{2\sqrt{31}}, -\frac{5}{2\sqrt{31}}, \frac{3}{2\sqrt{31}} \right)$$

– a keresett ortonormalizált vektorrendszer.

2. A $C^2_{[0,1]}$ euklideszi térben, mely az összes olyan függvény tere, melyek négyzete integrálható, ortogonalizáljuk a $p_1 = 1$, $p_2 = x$, $p_3 = x^2$, $p_4 = x^3$ polinomok rendszerét!

Megoldás. Ahogy az előző példában is, feltesszük, hogy

$$b_1 = p_1 = 1, \qquad b_2 = \lambda_1^{(2)} b_1 + p_2.$$

Megkeressük a $\lambda_1^{(2)} = -\dfrac{(p_2, b_1)}{(b_1, b_1)} = -\dfrac{\int_0^1 x dx}{\int_0^1 1 dx} = -\dfrac{\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1}{1} = -\dfrac{1}{2}$.

Ezért $b_2 = -\dfrac{1}{2} + x$. A b_3 vektort a következő alakban fogjuk keresni:

$$b_3 = \lambda_1^{(3)} b_1 + \lambda_2^{(3)} b_2 + p_3 .$$

Hasonlóan az előző példához a $\lambda_1^{(3)}$, $\lambda_2^{(3)}$ együtthatókat a következőképpen számítjuk ki:

$$\lambda_1^{(3)} = -\frac{(p_3, b_1)}{(b_1, b_1)} = -\frac{\int_0^1 x^2 dx}{1} = -\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = -\frac{1}{3},\ \lambda_2^{(3)} = -\frac{(p_3, b_2)}{(b_2, b_2)} = -\frac{\int_0^1 x^2\left(-\frac{1}{2} + x\right) dx}{\int_0^1 \left(-\frac{1}{2} + x\right)^2 dx} = -\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12}} = -1.$$

Tehát

$$b_3 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - x + x^2 = \frac{1}{6} - x + x^2 .$$

A $b_4 = \lambda_1^{(4)} b_1 + \lambda_2^{(4)} b_2 + \lambda_3^{(4)} b_3 + p_4$ vektor $\lambda_1^{(4)}$, $\lambda_2^{(4)}$, $\lambda_3^{(4)}$ együtthatóit az alábbi képletek segítségével számítjuk ki:

$$\lambda_1^{(4)} = -\frac{(p_4, b_1)}{(b_1, b_1)} = -\frac{\int_0^1 x^3 dx}{1} = -\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 = -\frac{1}{4},$$

$$\lambda_2^{(4)} = -\frac{(p_4, b_2)}{(b_2, b_2)} = -\frac{\int_0^1 x^3\left(-\frac{1}{2} + x\right) dx}{\int_0^1 \left(-\frac{1}{2} + x\right)^2 dx} = -\frac{\frac{3}{40}}{\frac{1}{12}} = -\frac{9}{10},$$

$$\lambda_3^{(4)} = -\frac{(p_4, b_3)}{(b_3, b_3)} = -\frac{\int_0^1 x^3\left(\frac{1}{6} - x + x^2\right) dx}{\int_0^1 \left(\frac{1}{6} - x + x^2\right)^2 dx} = -\frac{\frac{1}{120}}{\frac{1}{180}} = -\frac{2}{3}.$$

Így

$$b_4 = -\frac{1}{20} + \frac{3}{5} x - \frac{3}{2} x^2 + x^3 .$$

Gyakorlatok

1. Az $\mathbb{R}^4$ euklideszi térben ortonormalizálja az a_1, a_2, a_3, a_4 vektorrendszert!

1.1. $a_1=(1,1,1,1)$, $a_2=(1,-1,1,-1)$, $a_3=(0,1,1,1)$, $a_4=(0,0,1,1)$.

1.2. $a_1=(1,-1,1,-1)$, $a_2=(1,0,-1,0)$, $a_3=(0,1,1,1)$, $a_4=(0,0,1,-1)$.

1.3. $a_1=(-1,-1,1,1)$, $a_2=(1,0,-1,0)$, $a_3=(1,1,1,0)$, $a_4=(1,0,0,-1)$.

1.4. $a_1=(1,1,-1,-1)$, $a_2=(1,0,1,0)$, $a_3=(1,1,0,1)$, $a_4=(1,1,0,0)$.

1.5. $a_1=(1,1,1,-1)$, $a_2=(1,0,0,1)$, $a_3=(1,1,1,0)$, $a_4=(0,1,1,1)$.

1.6. $a_1=(-1,1,1,1)$, $a_2=(1,1,0,0)$, $a_3=(0,1,0,1)$, $a_4=(0,0,1,1)$.

1.7. $a_1=(1,2,1,1)$, $a_2=(2,-1,1,-1)$, $a_3=(1,1,2,0)$, $a_4=(1,1,0,0)$.

1.8. $a_1=(0,0,1,-1)$, $a_2=(0,1,-1,1)$, $a_3=(1,1,-1,1)$, $a_4=(1,1,1,1)$.

1.9. $a_1=(-1,0,0,1)$, $a_2=(0,1,1,1)$, $a_3=(1,1,-1,-1)$, $a_4=(1,0,-1,0)$.

1.10. $a_1=(0,1,1,1)$, $a_2=(1,-1,2,0)$, $a_3=(0,0,1,1)$, $a_4=(1,1,1,1)$.

2. A $C^2_{[\alpha,\beta]}$ euklideszi térben, mely az összes olyan függvény tere, melyek négyzete integrálható, ortogonalizálja a $p_1=1$, $p_2=x$, $p_3=x^2$, $p_4=x^3$ polinomok rendszerét (a $C^2_{[\alpha,\beta]}$ tér két tetszőleges f és g függvényének skaláris szorzata a következő módon határozható meg: $(f,g)=\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx$)!

2.1. $\alpha=0$, $\beta=1$. **2.2.** $\alpha=-1$, $\beta=0$.

2.3. $\alpha=1$, $\beta=2$. **2.4.** $\alpha=-2$, $\beta=-1$.

2.5. $\alpha=2$, $\beta=3$. **2.6.** $\alpha=-3$, $\beta=-2$.

2.7. $\alpha=-1$, $\beta=1$. **2.8.** $\alpha=-2$, $\beta=2$.

2.9. $\alpha=-2$, $\beta=0$. **2.10.** $\alpha=-1$, $\beta=2$.

28. Kvadratikus alak normálalakja

Példafeladat

Keressük meg a valós számok teste felett az $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3$ kvadratikus alak normálalakját valamint az ismeretlenek transzformációit, amelyek ehhez az alakhoz vezetik az f alakot!

Megoldás. Előbb elvégezzük az ismeretlenek transzformációját, amely fordított az alábbi transzformációhoz:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2, \\ y_2 = x_2, \\ y_3 = x_3, \end{cases}$$

vagyis az alábbi transzformációt:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2, \\ x_2 = y_2, \\ x_3 = y_3, \end{cases}$$

az alábbi mátrixszal:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ami után azt kapjuk, hogy

$$f = y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2 + 2y_2^2 - y_3^2 + 2y_1y_2 - 2y_2^2 - 4y_2y_3 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - 4y_2y_3.$$

Feltéve, hogy

$$\begin{cases} z_1 = y_1, \\ z_2 = y_2 - 2y_3, \\ z_3 = y_3, \end{cases}$$

vagyis elvégezve az ismeretlenek lineáris transzformációit az alábbi mátrixszal:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

az f kvadratikus alakot a következő alakhoz hozzuk:

$$f = z_1^2 + z_2^2 + 4z_2z_3 + 4z_3^2 - z_3^2 - 4z_2z_3 - 8z_3^2 = z_1^2 + z_2^2 - 5z_3^2.$$

Végül, elvégezzük az alábbi transzformációt:

$$\begin{cases} z_1 = u_1, \\ z_2 = u_2, \\ z_3 = \dfrac{1}{\sqrt{5}} u_3, \end{cases}$$

az alábbi mátrixszal:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Eredményül megkapjuk az f kvadratikus alak kanonikus alakját

$$f = u_1^2 + u_2^2 - u_3^2.$$

A

$$Q = ABC = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2\dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 2\dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

mátrix az ismeretlenek lineáris transzformációnak mátrixa, ami az f kvadratikus alakot kanonikus alakba vezeti át.

Gyakorlatok

Keresse meg megfelelően a valós és komplex számok teste felett az $f(x_1, x_2, x_3)$ kvadratikus alak normálalakját valamint az ismeretlenek transzformációit, amelyek ehhez az alakhoz vezetik az f alakot!

1. $f = x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3$.

2. $f = -x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3$.

3. $f = x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_2x_3$.

4. $f = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 - 6x_1x_2 - 4x_2x_3$.

5. $f = -x_1^2 + 4x_2^2 - x_3^2 + 8x_2x_3 - 4x_1x_3$.

6. $f = -x_1^2 + 3x_2^2 - 3x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_2x_3 - 4x_1x_3$.

7. $f = x_1^2 + 2x_2^2 - 8x_1x_2 + 4x_2x_3 + 2x_1x_3$.

8. $f = -2x_1^2 - 2x_2^2 - 8x_1x_2 - 4x_2x_3$.

9. $f = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 6x_2x_3 - 2x_1x_3$.

10. $f = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 9x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_2x_3 + 2x_1x_3$.

29. Pozitív és negatív definit kvadratikus alakok

Példafeladat

A $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ kvadratikus alak, amely az alábbi mátrixszal van megadva:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

pozitív definit, negatív definit vagy indefinit?

Megoldás. Kiszámítjuk a $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ kvadratikus alak mátrixának sarok aldeterminánsait:

$$A_1 = |3| = 3 > 0, \qquad A_2 = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 5 > 0,$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 8 > 0,$$

$$A_4 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0,$$

$$A_5 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0.$$

Amennyiben a $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ kvadratikus alak összes sarok aldeterminánsa pozitív, úgy az egy pozitív definit kvadratikus alak.

Gyakorlatok

A $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = X^T AX$ kvadratikus alak, amely az A mátrixszal van megadva, pozitív definit, negatív definit vagy indefinit?

1. $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $A=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

4. $A=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

5. $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

6. $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

7. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

8. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

9. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 4 & -4 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

10. $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Irodalomjegyzék

1. *Fried Ervin* Algebra I. Elemi és lineáris algebra. – Budapest: Nemzeti tankönyvkiadó, 2000.
2. *D.K. Fagyejev, I.Sz. Szominszkij* Felsőfokú algebrai példatár. – Budapest: Typotex, 2006.
3. *A.G. Kuros* Felsőbb algebra. – Budapest: Tankönyvkiadó, 1967.
4. *B. Bódi* Az algebra alapjai. – Ungvár: PoliPrint, 2010.
5. *Ван дер Варден Б.Л.* Алгебра. – М.:Наука, 1979.
6. *Завало С. Т.* Курс алгебри. – К.:Вища школа, 1985.
7. *Кострыкин А.И.* Введение в алгебру. – М.:Наука, 1973.
8. *Мальцев А.И.* Основы линейной алгебры. – М.:Наука, 1975.
9. *Проскуряков И.В.* Сборник задач по линейной алгебре. – М.:Наука, 1974.
10. *Баранник В.Ф., Погоріляк Є.Я., Рудько В.П., Шапочка І.В.* Лінійна алгебра. – Ужгород: Ужгород. держ. ун-т, 2000.
11. *Гудивок П.М., Погоріляк Є.Я., Шапочка І.В.* Практикум з алгебри і теорії чисел для студентів першого курсу. – Ужгород: Ужгород. держ. ун-т, 2002.